LE PARADOXE DE LA MOYENNE

Objectif	*Faire réfléchir sur la notion de moyenne.*
Outils	*Calcul intégral. Définition de la moyenne d'une fonction sur un intervalle*

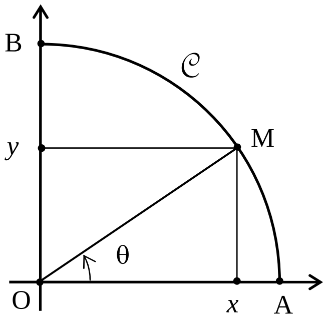
On connaît la définition de la moyenne d'une fonction sur un intervalle et on suppose que le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct.
Peut-on calculer la « moyenne des ordonnées » des points du quart de cercle ayant pour centre l'origine du repère, pour rayon 1 et situé dans le premier quadrant ?

On appelle moyenne d'une fonction f continue sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ le nombre m tel que $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$,

on veut calculer « la moyenne des ordonnées » des points du quart de cercle $\mathscr{C}$ de centre O et d'extrémités A et B.

Pour tout point M de $\mathscr{C}$, on note y_{M} l'ordonnée de M.



A. Deux méthodes contradictoires

1. Pour M élément de $\mathscr{C}$, on note θ la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}})$.

   Exprimer y_{M} en fonction de θ. On définit ainsi une fonction f_1.

   En utilisant f_1, que vaut « la moyenne des y_{M} pour θ élément de $\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ » ?

   On note m_1 ce résultat.

2. Pour M élément de $\mathscr{C}$, on note x l'abscisse de M.

   Exprimer y_{M} en fonction de x. On définit ainsi une fonction f_2.

   Démontrer qu'en utilisant f_2, « la moyenne des y_{M} pour x élément de $[\,0\,;\,1\,]$ » vaut $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\;dx$

   On note m_2 ce résultat.

   En interprétant m_2 comme une aire, donner la valeur numérique de m_2.

3. Faire apparaître une contradiction.

B. De pire en pire

1. Pour M élément de $\mathcal{C}$, on note u le carré de l'abscisse de M ; on a donc $u = x^2$.

   Exprimer y_M en fonction de u. On définit ainsi une fonction f_3.

   En utilisant f_3, que vaut « la moyenne des y_M pour $u = x^2$ élément de $[0 ; 1]$ » ?

   On note m_3 ce résultat.

2. Lorsque M décrit $\mathcal{C}$, quel intervalle décrit y_M ?

   Comment peut-on envisager de calculer « la moyenne des y_M » pour y_M élément de $[0 ; 1]$?

   On note m_4 ce résultat.

Toutes ces valeurs sont contradictoires !

C. La solution de ce paradoxe

La contradiction provient du fait que l'on ne doit parler que de la valeur moyenne d'une fonction et non de la valeur moyenne d'une « quantité ».

Les nombres m_1, m_2, m_3, m_4, sont les moyennes de différentes fonctions. Il n'est donc pas surprenant qu'elles soient distinctes.

Quant à « la valeur moyenne des y_M pour M élément de $\mathcal{C}$ », ce n'est pas un nombre défini avec suffisamment de précision.

D. Une interprétation physique des différentes moyennes

On peut imaginer que le point M se déplace sur $\mathcal{C}$. Alors les différents nombres θ, x, u, y, varient en fonction du temps.

La moyenne des y_M lorsque M parcourt $\mathcal{C}$ dépend de la nature du mouvement de M sur $\mathcal{C}$.

Plus précisément, cette moyenne est égale à m_1, m_2, m_3, m_4, suivant que respectivement θ, x, u, y sont fonction affine du temps (c'est-à-dire varient avec une vitesse de variation constante).

- Si θ est fonction affine du temps, c'est-à-dire si M est animé d'un mouvement circulaire uniforme, alors la moyenne des ordonnées y_M est égale à m_1.
- Si M parcourt $\mathcal{C}$ de telle sorte que x soit fonction affine du temps, alors la moyenne des ordonnées est égale à m_2.
- Si M parcourt $\mathcal{C}$ de telle sorte que $u = x^2$ soit fonction affine du temps, alors la moyenne des ordonnées est égale à m_3.
- Si M parcourt $\mathcal{C}$ de telle sorte que y_M soit fonction affine du temps, alors la moyenne des ordonnées y_M est égale à m_4.