Quand S devient Sigma

Objectif	*Utiliser le théorème sur les fonctions monotones bornées pour étudier l'existence de limites.*
Outils	*Connaissance des propriétés usuelles de la fonction exponentielle. Bonne maîtrise du calcul intégral décrit dans les programmes de terminale S. Théorème sur les fonctions monotones bornées.*

On se propose d'exprimer l'aire d'une surface illimitée comme une limite de suite puis de trouver une valeur approchée de cette aire.

Première méthode

Partie A

1. On considère la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = e^x(2-x)$.
   a. Étudier les variations de la fonction h et déterminer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Soit m un nombre réel donné.
   Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de l'équation $h(x) = m$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$.
   a. Démontrer que f est dérivable en zéro et déterminer le nombre dérivé.
   b. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbf{R}$ et calculer la fonction dérivée f'.
   Démontrer qu'il existe un réel a unique tel que $f'(a) = 0$.
   Démontrer que $f(a) = a(2-a)$ et que a appartient à l'intervalle $]\,1{,}59\,;\,1{,}6\,[$.
   c. Étudier les variations de la fonction f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 2 cm) en précisant les branches infinies.

3. On pose, pour tout réel positif x, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.
   a. Résoudre l'inéquation $f(t) \leq 2\,t^2\,e^{-t}$ dans $[\,0\,;\,+\infty[$.
   b. On pose, pour tout réel positif x, $G(x) = \displaystyle\int_{\ln 2}^x t^2\,e^{-t}\,dt$.
   Calculer $G(x)$ à l'aide d'une double intégration par parties et démontrer que G admet en $+\infty$ une limite que l'on calculera.
   c. Déduire des questions précédentes que F est une fonction bornée.
   d. Démontrer que F est une fonction croissante sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

   Il en résulte que F admet, en $+\infty$, une limite finie ℓ.

Partie B

1. Démontrer que pour tout entier naturel k non nul et pour tout réel x non nul on a :

$$\frac{1}{e^x-1}=e^{-x}+e^{-2x}+.....+e^{-(k-1)x}+e^{-kx}+\frac{e^{-kx}}{e^x-1}$$

2. Montrer que pour tout entier naturel k non nul et pour tout réel x positif on a :
$0\leq\int_0^x f(t)e^{-kt}dt\leq\frac{a(2-a)}{k}$ où a est le nombre défini dans la partie A.2.b.

3. Calculer, à l'aide d'une double intégration par parties, l'intégrale $I_p(x)=\int_0^x t^2\,\mathrm{e}^{-p\,t}\,dt$ où p est un entier naturel non nul et x un réel positif donnés.
Démontrer que $I_p(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.

4. a. Démontrer que, pour tout réel positif x, on a $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{e}^{-k\,t}\,dt=F(x)-\sum_{p=1}^{p=k}I_p(x)$.

   En déduire que la fonction qui, à tout réel positif x, associe l'intégrale $\int_0^x f(t)e^{-kt}dt$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$. On notera ℓ_k cette limite.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a $\ell-\ell_k=2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+....+\frac{1}{k^3}\right)$.

   c. En utilisant l'encadrement obtenu à la question B.2, démontrer que la suite (ℓ_k) converge vers 0.

   d. Démontrer que la suite de terme général $u_k=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+....+\frac{1}{k^3}$ est convergente et que, si on note ℓ' sa limite, on a: $\ell=2\,\ell'$.

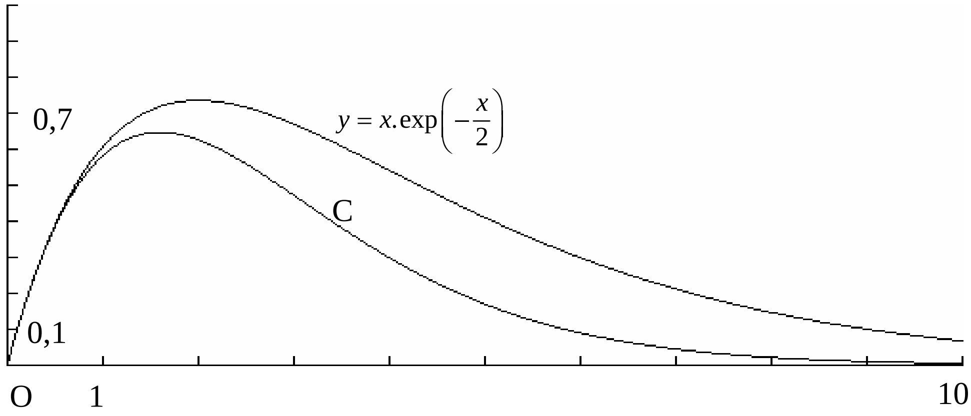
   e. Trouver une condition suffisante, portant sur l'entier k, pour que $\ell_k\leq 0{,}1$.

   En déduire que $2{,}3\leq\ell\leq 2{,}5$.

Deuxième méthode

On considère la fonction f définie sur $[\, 0 \,;\, +\infty \,[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$ si $x > 0$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$. On a tracé $\mathcal{C}$ sur le graphique ci-dessous[1].



1. Interprétation graphique de certaines intégrales.
   a. Démontrer que f admet pour limite zéro en $+\infty$.
   b. Démontrer que f est dérivable en 0.
   c. Justifier l'existence, pour tout nombre positif m, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^m f(x)\, dx$.

   On note F la fonction définie pour tout réel positif m par : $F(m) = \displaystyle\int_0^m f(x)\, dx$.

   d. Interpréter graphiquement $F(m)$, m étant un réel positif.
   e. Démontrer que la fonction F est croissante sur $[\, 0 \,;\, +\infty[$.

2. Existence d'une limite finie de F en $+\infty$

   Pour démontrer que F admet une limite en $+\infty$, on cherche à majorer F, et pour cela on va d'abord majorer f par une fonction g dont on sait calculer les intégrales sur $[\, 0 \,;\, m \,]$.

   a. Soit φ la fonction définie sur $[\, 0 \,;\, +\infty \,[$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - x$ et φ' sa fonction dérivée.

   Étudier les variations de φ', puis celles de φ, et en déduire le signe de φ.

   En déduire que pour tout réel positif x, on a : $x \le \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

   b. En déduire que pour tout réel positif x, $f(x) \le x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

   Démontrer que pour tout réel positif m : $F(m) \le \displaystyle\int_0^m x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\, dx$. Cette deuxième intégrale sera notée $I_{\frac{1}{2}}(m)$.

   c. Plutôt que de calculer seulement cette dernière intégrale, on va se placer dans un cas plus général, qui va être utile pour la suite. Pour tous réels positifs λ et m, on pose :

[1] Il est aisé de démontrer qu'il existe un nombre strictement positif a tel que f soit strictement croissante sur $[\, 0 \,;\, a \,]$ et strictement décroissante sur $[\, a \,;\, +\infty \,[$. Mais ces résultats ne seront pas utilisés dans la suite du problème.

$$I_\lambda(m) = \int_0^m x \cdot e^{-\lambda x}\, dx .$$

Calculer $I_\lambda(m)$ en fonction de λ et de m, grâce à une intégration par parties.

Démontrer que pour tous réels positifs λ et m, $I_\lambda(m) \leq \dfrac{1}{\lambda^2}$ et $\lim\limits_{m \to +\infty} I_\lambda(m) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

d. Déduire des questions précédentes un nombre réel qui soit un majorant de F sur $[\, 0\, ; +\infty\, [$.

F étant croissante et majorée sur $[\, 0\, ; +\infty\, [$, elle admet donc une limite finie en $+\infty$ que l'on note ℓ.

e. Donner une interprétation graphique de ℓ (on ne demande pas de justifier cette interprétation).

3. Approximation de ℓ à l'aide d'une suite

a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout réel non nul x on a :

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-(k-1)x} + e^{-kx} + \frac{e^{-kx}}{e^x - 1}$$

Pour tout entier naturel k et tout réel positif m, on pose $J_k(m) = \displaystyle\int_0^m x^2\, e^{-kx}\, dx$.

Démontrer que pour tout entier naturel k et tout réel positif m,

$$F(m) = J_1(m) + J_2(m) + \ldots + J_k(m) + \int_0^m f(x) \cdot e^{-kx}\, dx$$

On pose alors $R_k(m) = F(m) - \left[J_1(m) + J_2(m) + \ldots + J_k(m)\right] = \displaystyle\int_0^m f(x) \cdot e^{-kx}\, dx$.

b. Grâce à une intégration par parties, exprimer $J_k(m)$ en fonction de $I_k(m)$.

En déduire que $\lim\limits_{m \to +\infty} J_k(m) = \dfrac{2}{k^3}$.

c. En utilisant la majoration de f établie à la question 2.b., démontrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout réel non nul m on a les inégalités suivantes :

$0 \leq R_k(m) \leq I_{k+\frac{1}{2}}(m)$, puis $0 \leq R_k(m) \leq \dfrac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}$.

En déduire que, pour tout entier naturel non nul k, $0 \leq \ell - 2\left(1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{k^3}\right) \leq \dfrac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}$

d. Démontrer que la suite u de terme général $u_k = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{k^3}$ est convergente et a pour limite $\dfrac{\ell}{2}$.

e. Poser $k = 10$ dans le dernier encadrement de la question c. et en déduire une valeur approchée de ℓ à $0{,}01$ près.