SUITES INTÉGRALEMENT DIABOLIQUES

Objectif	*Établir le comportement asymptotique de deux suites grâce aux propriétés d'une suite d'intégrales..*
Notions utilisées	*Théorèmes sur les limites (le théorème sur la convergence d'une suite décroissante positive est rappelé). Raisonnement par récurrence. Intégration par parties. Intégration et ordre.*

Ce problème a pour propos l'étude des suites u et v définies sur $\mathbf{N^*}$ par :

$$u_p = \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2p-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2p)} \text{ et } v_p = \frac{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2p)}{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2p+1)}$$

u_p est le quotient du produit des p premiers naturels impairs par le produit des p premiers naturels pairs non nuls. v_p est le quotient du produit des p premiers naturels pairs non nuls par le produit des $(p + 1)$ naturels impairs.

Dans une première partie, on exploite la définition des suites u et v.

Dans une seconde partie, on utilise une suite d'intégrales afin d'obtenir des résultats beaucoup plus précis.

Dans une troisième partie, on traduit le résultat obtenu en un résultat faisant intervenir des factorielles.

On considère les suites u et v définies sur $\mathbf{N^*}$ par :

$$u_p = \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2p-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2p)} \text{ et } v_p = \frac{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2p)}{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2p+1)}.$$

A. Limite des suites u et v.

1. Démontrer que les suites u et v sont décroissantes. Comme elles sont positives, on en déduit qu'elles sont convergentes. On note ℓ la limite de la suite u et ℓ' la limite de la suite v.
2. a. Pour tout entier naturel non nul p, exprimer $u_p.v_p$ en fonction de p.

   b. Démontrer que l'un au moins des réels ℓ et ℓ' est nul.
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul p, on a $u_p \leq v_p \leq 2.u_p$.

   b. En déduire que les suites u et v convergent toutes deux vers zéro.

B. Autres propriétés des suites u et v

On considère la suite i définie sur $\mathbf{N}$ de la façon suivante :

$i_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$ et, pour tout entier naturel non nul n, $i_n = I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$

1. a. Calculer i_1 et i_2.

   b. Soit n un entier naturel. Exprimer i_{n+2} en fonction de i_n, grâce à une intégration par parties de i_{n+2} au cours de laquelle on considérera une primitive de la fonction cosinus.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel p, on a $i_{2p} = \frac{\pi}{2} u_p$ et $i_{2p+1} = v_p$.

2. a. En revenant à la définition même de i_n, démontrer que la suite i est décroissante.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{i_{n+1}}{i_n} \leq 1$.

   c. En déduire que la suite $\frac{v_p}{u_p}$ est convergente vers une limite que l'on précisera.

3. a. À l'aide du résultat établi dans la question A.2.a., démontrer que, pour tout entier naturel non nul p, on a $\left(u_p \sqrt{p}\right)^2 = \frac{p}{2p+1} \times \frac{u_p}{v_p}$

   b. En déduire que les suites de terme général $u_p \sqrt{p}$ et $v_p \sqrt{p}$ convergent vers des réels que l'on précisera.

   c. Soit les suites u' et v' définies sur $\mathbf{N^*}$ par $u'_p = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{p}}$ et $v'_p = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$.

   Démontrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{u_p}{u'_p} = 1$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{v_p}{v'_p} = 1$

   On dit alors que la suite u est équivalente à la suite u' au voisinage de $+\infty$. De même v est équivalente à v' au voisinage de $+\infty$. On a donc réussi à comparer les suites u et v à des suites d'expressions très simples.

C. Interprétation du résultat précédent avec des factorielles

1. Soit p un entier naturel non nul.

   a. Exprimer $\left(2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2p)\right)^2 u_p$ sous une forme très simple.

   b. En déduire l'expression de u_p en fonction de $(2p)!$ et $p!$.

2. Démontrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{(2p)!}{\left(2^p . p!\right)^2} \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, résultat fort surprenant car il fait intervenir π dans un résultat sur les factorielles et les racines carrées.