Carré de l'image = Image du carré

Objectif	*Résoudre une équation fonctionnelle.*
Outils	*Raisonnement par récurrence. Fonction logarithme népérien. Fonctions puissances et leurs propriétés (en particulier x^α est définie en 0 pour $a > 0$*

Trouver les fonctions définies continues sur **R**⁺, dérivables sur R⁺*, de dérivée continue en 1 et telles que l'image du carré de chaque réel positif soit égale au carré de l'image de ce réel.

Propriétés : $\begin{cases} (1) & \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^+, \quad f\left(x^2\right) = \left(f(x)\right)^2 \\ (2) & f \text{ est continue sur } \mathbf{R}^+, \text{ dérivable sur } \mathbf{R}^{+*} \\ (3) & f' \text{ est continue en } 1 \end{cases}$

Questions

1. a. Quelles sont les fonctions constantes solutions du problème ?

   b. Montrer que les fonctions $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$ sont solutions du problème.

   c. Soit la fonction h définie sur $\mathbf{R}^+$ par $\begin{cases} h(x) = x^2 & \text{pour tout } x \in [\,0\,;1\,] \\ h(x) = \sqrt{x} & \text{pour tout } x \in [\,1\,;+\infty\,[\end{cases}$

   Montrer que h vérifie les propriétés (1) et (2) mais pas la propriété (3).

2. a. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a : $f(x) \geq 0$.

   b. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$ et $f(1)$?

3. Démontrer que :

   a. pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $f(x^4) = [\,f(x)]^4$

   b. pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = [\,f(x)]^{\frac{1}{2}}$

   c. pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, et tout $n \in \mathbf{N}$, $f\left(x^{2^n}\right) = [\,f(x)]^{2^n}$ (1')

   d. pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, et tout $n \in \mathbf{N}$, $f\left(x^{2^{-n}}\right) = [\,f(x)]^{2^{-n}}$ (2')

4. Soit a et x deux réels positifs non nuls.

   a. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{2^{-n}}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f\left(a^{2^{-n}}\right) - f\left(x^{2^{-n}}\right)\right]$.

   En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left[f(a)\right]^{2^{-n}} - \left[f(x)\right]^{2^{-n}}\right)$.

   b. Démontrer que, si f s'annule pour un réel a non nul, alors, pour tout réel x non nul, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f(x)\right]^{2^{-n}} = 0$.

   En déduire que f est constante sur] 0 ; $+\infty$ [, puis que f est constante sur [0 ; $+\infty$ [.

5. On suppose f non constante.

   a. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $f(x) \neq 0$.

   b. On considère la fonction g définie sur] 0 ; $+\infty$ [par $g(x) = \dfrac{x\, f'(x)}{f(x)}$.

   En dérivant la relation $f(x^2) = [f(x)]^2$, calculer $g(x^2)$ en fonction de $g(x)$.

   c. Montrer que, quel que soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a : $g(x) = g\left(x^{2^n}\right)$ puis que $g(x) = g\left(x^{2^{-n}}\right)$.

   En faisant tendre n vers l'infini, démontrer que g est constante sur] 0 ; $+\infty$ [et donc qu'il existe un réel k tel que, pour tout x appartenant à] 0 ; $+\infty$ [, on a : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{k}{x}$.

   d. En déduire que les fonctions cherchées, si elles ne sont pas constantes, sont nécessairement de la forme $x \mapsto f(x) = \alpha x^k$, avec $\alpha > 0$ et $k > 0$.

6. Pour quelles valeurs de α la fonction $x \mapsto \alpha x^k$ est-elle une fonction f cherchée ?

   En déduire toutes les fonctions f cherchées.