F O F = EXP

Objectif	*Résolution d'une équation fonctionnelle par analyse et synthèse*
Notions utilisées	*Tout le programme de TS, en particulier le raisonnement par récurrence, mais aussi l'ensemble des propriétés des fonctions continues sur un intervalle de* **R**.

Dans cette séquence on soulève le problème de l'existence de fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ et vérifiant la relation : $f \circ f = \exp$ et on s'intéresse aux propriétés de telles fonctions.

A. Propriétés de base des fonctions solutions

On considère une fonction f continue sur $\mathbf{R}$ et vérifiant : $f \circ f = \exp$.

1. Encadrement de f par deux fonctions usuelles.
   a. Démontrer que toute solution de l'équation $f(x) = x$ est aussi solution de l'équation $e^x = x$.
   En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution.
   b. En déduire que $f(x) - x$ est de signe constant pour x réel.
   c. Démontrer qu'il est impossible que, pour tout réel x, on ait $f(x) < x$.
   En déduire que, pour tout réel x, $f(x) > x$.
   d. Démontrer que pour tout réel x, $f(x) < e^x$.
   e. Démontrer que $f(0)$ appartient à l'intervalle $]\,0\,;\,1\,[$.

2. Propriété fondamentale.
   Démontrer que pour tout réel x, $f(e^x) = e^{f(x)}$ (propriété (*)).

3. Limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$
   b. $f(x)$ s'écrit $f(x) = \ln(\exp(f(x)))$.
   Transformer cette écriture grâce à la propriété (*****). En déduire que f tend vers $\ln(f(0))$ en $-\infty$.
   Démontrer que $\ln(f(0))$ est strictement négatif.

4. Sens de variation de f.
   Démontrer que f est injective.
   En déduire que f est strictement monotone sur $\mathbf{R}$, puis que f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ (utiliser 3.a.).

B. Croissances comparées au voisinage de $+\infty$

1. Minoration de $\dfrac{f(x)}{x}$.

   On pose, pour tout réel x strictement positif, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

   a. En considérant l'image par g de l'intervalle $[\,1\,;\,\mathrm{e}\,]$, démontrer qu'il existe un nombre réel k, strictement supérieur à 1, tel que, pour tout réel x de $[\,1\,;\,\mathrm{e}\,]$, $g(x) \geq k$.

   b. Démontrer que, pour tout réel strictement positif x, $g(\mathrm{e}^x) = \exp(\,x\,(\,g(x) - 1)\,)$ (propriété (**)).

   Démontrer que, si x est élément de $[\,1\,;\,+\infty\,[$ et si $g(x) \geq k$, alors $g(\mathrm{e}^x) \geq k$ (on rappelle que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geq x + 1$).

   c. On définit une suite $(\mathrm{e}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}^*}$ par récurrence en posant $\mathrm{e}_1 = \mathrm{e}$ et, pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{e}_{n+1} = \exp(\mathrm{e}_n)$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, g est minorée par k sur l'intervalle $[\,1\,;\,\mathrm{e}_n\,]$.

   d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}_n \geq n$.

   En déduire la limite de la suite (e_n).

   e. Démontrer que g est minorée par k sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$.

2. Diverses limites

   a. À partir de la propriété (**), démontrer que, pour tout réel t de $[\,\mathrm{e}\,;\,+\infty\,[$, $g(t) = \exp(\,\ln t\,(\,g(\ln t) - 1))$.

   En déduire, grâce au B.1.e., une minoration de $g(t)$, pour t élément de $[\,\mathrm{e}\,;\,+\infty\,[$, puis la limite de $\dfrac{f(t)}{t}$ quand t tend vers $+\infty$.

   b. Soit $a \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[$ et $x \in\,]\,1\,;\,+\infty\,[$.

   Exprimer $\dfrac{f(x)}{x^a}$ en fonction de $y = \ln x$, en utilisant la propriété (*).

   En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{x^a}$ pour x tendant vers $+\infty$.

   c. Pour x réel, $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$ peut s'écrire aussi $\dfrac{f(x)}{f(f(x))}$. En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$ pour x tendant vers $+\infty$.

   d. Soient a et x deux réels strictement positifs.

   Exprimer $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{ax}}$ en fonction de $y = \ln x$, en utilisant la propriété (*).

   En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{ax}}$ pour x tendant vers $+\infty$.

   e. Soient a et x deux réels strictement positifs.

   Exprimer $\dfrac{f(x)}{\exp(x^a)}$ en fonction de $y = \ln x$,, en utilisant la propriété (*).

   En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{\exp(x^a)}$ pour x tendant vers $+\infty$.

C. Expression de f à partir d'une de ses restrictions

Soit ϕ la restriction de f à l'intervalle $[\ 0\ ;\ f(0)\ ]$. On se propose de montrer que la connaissance de ϕ entraîne la connaissance de f sur $\mathbf{R}$ tout entier.

1. a. Démontrer que ϕ est bijective de $[\ 0\ ;\ f(0)\ ]$ sur $[\ f(0)\ ;\ 1\ ]$.

   b. Démontrer que $\exp \circ \phi^{-1}$ est le restriction de f à l'intervalle $[\ f(0)\ ;\ 1\ ]$.

   La connaissance de ϕ entraîne donc la connaissance de f sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 1\ ]$.

   On note f_0 la restriction de f à $[\ 0\ ;\ 1\ ]$.

2. Soit ψ la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0\ ]$.

   Démontrer que pour tout x de $]-\infty\ ;\ 0\ ]$, $\psi(x) = \ln(\ f_0\ (\ \exp\ (x)\ )\ )$. (On pourra utiliser la propriété *).

   La connaissance de f sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 1\ ]$ entraîne donc la connaissance de f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0\ ]$.

3. On définit une suite $(e_n)_{n \in \mathrm{N}}$ par récurrence en posant : $e_1 = 0$ et, pour tout entier naturel non nul n, $e_{n+1} = \exp(e_n)$. On note I_n l'intervalle $[\ e_n\ ;\ e_{n+1}\ ]$, et f_n la restriction de f à l'intervalle I_n.

   Démontrer que, pour tout entier naturel n , $f_{n+1} = \exp \circ f_n \circ \ln$.

   En conséquence, la connaissance de f sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 1\ ]$ entraîne la connaissance de la restriction de f à chacun des intervalles de la forme $[\ e_n\ ;\ e_{n+1}\ ]$, pour n entier naturel. Or la réunion de tous ces intervalles est $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$[1].

   Donc la connaissance de f sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 1\ ]$ entraîne la connaissance de f sur $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$.

D. Construction des fonctions solutions

Soit α un réel de l'intervalle $]\ 0\ ;\ 1\ [$. On considère une fonction ϕ définie, continue et strictement croissante sur $[\ 0\ ;\ \alpha\ ]$ telle que $\phi(0) = \alpha$ et $\phi(\alpha) = 1$.

1. En suivant le plan de la partie C, construire une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ dont la restriction à $[\ 0\ ;\ \alpha\ ]$ soit ϕ.

2. Démontrer que la fonction f ainsi construite est continue sur $\mathbf{R}$.

3. Pour tout entier naturel n, on note f_n la restriction de f à l'intervalle I_n .

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, si x est élément de I_n , alors $f_n(x)$ appartient à I_n ou à I_{n+1}.

   b. Démontrer par récurrence la proposition suivante :
   Pour tout entier naturel n et pour tout x élément de I_n , $f \circ f(x) = f \circ f_n(x) = e^x$.
   On distinguera les deux cas : $f_n\ (x) \in I_n$; $f_n\ (x) \in I_{n+1}$.

   c. Soit ψ la restriction de f à $]-\infty\ ;\ 0\ ]$ et soit x un élément de cet intervalle.
   Démontrer que $\psi(x)$ appartient soit à $]-\infty\ ;\ 0\ ]$, soit à I_0.
   En déduire que $f \circ f(x) = f \circ \psi(x) = e^x$.

4. Conclure.

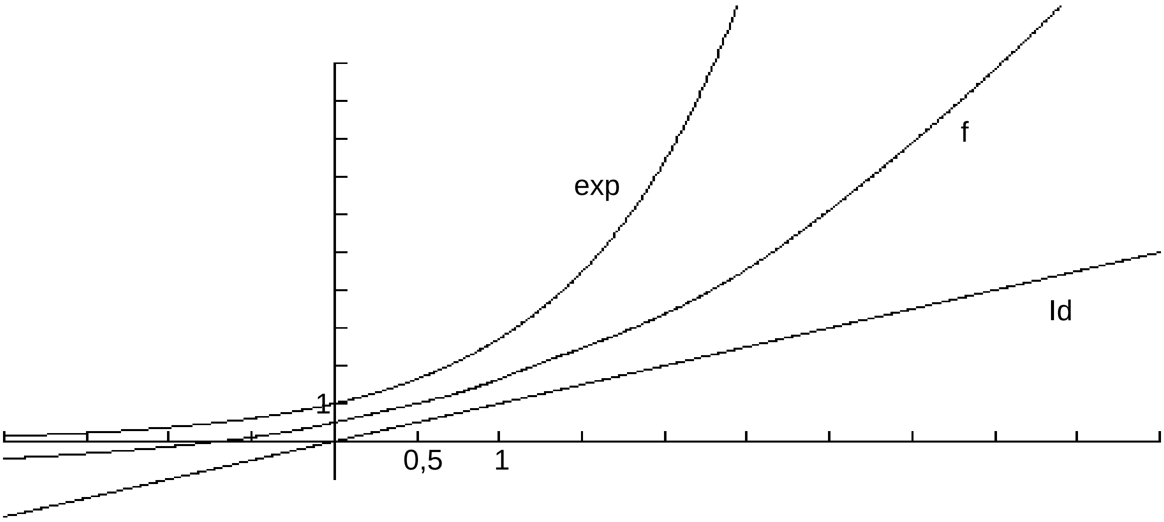
---

[1] Puisque la suite (e_n) est une suite croissante tendant vers $+\infty$. Ce dernier résultat a été démontré à la question B.1.d.

E. Représentation graphique et programmation d'une fonction solution

Si on pose $\alpha = \frac{1}{2}$ et si on considère la fonction affine ϕ définie sur $\left[\,0\,;\frac{1}{2}\,\right]$ par $\phi(x) = 0{,}5 + x$, la fonction ϕ ainsi définie vérifie les hypothèses spécifiées au début de la partie D. D'après la partie D., il existe donc une unique fonction f continue sur $\mathbf{R}$, vérifiant $f \circ f = \exp$, et dont la restriction à $\left[\,0\,;\frac{1}{2}\,\right]$ soit égale à ϕ.

Une programmation récursive permet d'utiliser l'ordinateur ou la calculatrice programmable pour obtenir la courbe représentative de f sur un intervalle borné quelconque.



La programmation récursive de la fonction f repose sur les relations vues ci-dessus :

- Pour tout x de $[\,\phi(0)\,;\,1\,]$, $f(x) = \exp \circ\, \phi^{-1}(x)$
- Pour tout x de $]-\infty\,;\,0\,]$, $f(x) = \ln(\,\phi(\exp(x))\,)$.
- Pour tout entier naturel n , $f_{n+1} = \exp \circ f_n \circ \ln$.

La voici par exemple écrite en ThinkPascal.

```
function  fn(t: real): real;
begin
   if (0 <= t) and (t <= 0.5) then  begin   fn := 0.5 . t end;
   if (t >= 0.5) and (t <= 1) then  begin  fn := exp(t - 0.5) end;
   if (t >= 1) then  begin  fn :=  exp( fn(ln(t)))  end;
   if (t <= 0) then begin  fn :=  ln( fn(exp(t))) end;
end;
```