# Queue de Poisson au péage

| | |
|---|---|
| ***Objectif*** | *Appliquer l'Analyse (équations fonctionnelles) aux Probabilités* |
| ***Notions utilisées*** | *Continuité. Dérivabilité. Fonctions exponentielles.* |

Des véhicules se présentent à un poste de péage de façon aléatoire. Déterminer la loi de probabilité qui donne le nombre de véhicules se présentant au péage pendant un laps de temps donné.

Pour tout couple $(u\,;\,v)$ de réels positifs, tels que $u \leq v$, on note $X_{[u;v]}$ la variable aléatoire égale au nombre de véhicules se présentant au péage entre les instants $u$ et $v$. On fait les hypothèses suivantes, qui paraissent correspondre à la réalité :

1. La loi de $X_{[u;v]}$ ne dépend que de la longueur de l'intervalle de temps $[u\,;\,v]$ ; autrement dit, pour tout entier naturel $n$, il existe une fonction $p_n$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$, à valeurs dans $[\,0\,;1]$, telle que : $P\left(X_{[u;v]} = n\right) = p_n(v-u)$ .

2. La probabilité d'arrivée d'un véhicule ou plus dans un intervalle de temps de durée nulle est elle-même nulle, soit encore : pour tout entier non nul $n$, $p_n(0) = 0$, et $p_0(0) = 1$ ; en revanche, la probabilité qu'il n'arrive aucun véhicule pendant une unité de temps n'est pas nulle : $p_0(1) \neq 0$. On notera : $p_0(1) = a$, avec $a \in\ ]\,0\,;1\,]$.

3. Les variables aléatoires $X_{[u;v]}$ concernant des intervalles de temps disjoints ou n'ayant qu'un instant en commun sont indépendantes. Autrement dit, si $u \leq v \leq u' \leq v'$, $X_{[u;v]}$ et $X_{[u';v']}$ sont indépendantes

4. Lorsque la longueur de l'intervalle de temps tend vers $0$, la probabilité d'arrivée de deux véhicules ou plus dans ce laps de temps est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un véhicule exactement : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-p_0(t)-p_1(t)}{p_1(t)} = 0$ .

## A. Détermination de la fonction $p_0$

($p_0(t)$ = probabilité qu'il n'arrive aucun véhicule durant un intervalle de temps de durée $t$).

1. a. Démontrer que, pour tous réels positifs $t$ et $s$ , $p_0(t+s) = p_0(t).p_0(s)$. (On pourra considérer les intervalles de temps : $[\,0\,;t\,]$ et $[\,t\,;t+s\,]$).
   b. En déduire que pour tout entier naturel $k$, $p_0(k.t) = \left(p_0(t)\right)^k$
   c. Démontrer que pour tout entier naturel non nul $k$, $p_0\left(\dfrac{1}{k}\right) = a^{\left(\frac{1}{k}\right)}$.
   d. Démontrer que, pour tout rationnel positif $r$, $p_0(r) = a^r$ .

2. Démontrer que la fonction $p_o$ est décroissante sur $\mathbf{R}^+$.

3. Démontrer que pour tout réel positif $t$, $p_0(t) = a^t$. (On rappelle que, pour tout réel $t$, il existe deux suites de nombres rationnels, l'une croissante, l'autre décroissante, qui convergent vers $t$).

## B. Détermination de la fonction $p_1$.

($p_1(t)$ = probabilité qu'il arrive exactement un véhicule durant un intervalle de temps de durée $t$).

1. Démontrer que pour tous réels positifs $t$ et $s$ : $p_1(t+s) = p_1(t)p_0(s) + p_1(s)p_0(t)$.

2. On pose, pour tout réel positif $t$, $q_1(t) = p_1(t).a^{-t}$.
   a. Démontrer que $q_1$ est positive, et que, pour tous, réels positifs $t$ et $s$, $q_1(t + s) = q_1(t) + q_1(s)$. Démontrer que $q_1$ est croissante sur $\mathbf{R}^+$.
   b. On pose $q_1(1) = C$. Donner l'expression de $q_1(t)$ en fonction de $C$ et de $t$ successivement pour $t \in \mathbf{Q}^+$ puis pour $t \in \mathbf{R}^+$ en suivant une démarche analogue à celle de la partie A.
   c. En déduire l'expression de $p_1(t)$ en fonction de $C$ et de $t$ pour $t \in \mathbf{R}^+$

3. En utilisant la dernière hypothèse faite en préliminaire, déterminer la valeur de $C$. Donner alors l'expression de $p_1(t)$.

## C. Quelques propriétés des fonctions $p_n$

La fonction q1 a été définie dans la question B.2. On pose plus généralement, pour tout entier naturel $n$ et tout réel positif $t$ : $q_n(t) = p_n(t).a^{-t}$.

1. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. En utilisant la dernière hypothèse faite en préliminaire, démontrer que : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{p_n(t)}{p_1(t)} = 0$.

   En déduire que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{p_n(t)}{t} = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{q_n(t)}{t} = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} p_n(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} q_n(t) = 0$

2. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.
   a. Démontrer que pour tous réels positifs $t$ et $s$ : $p_n(t+s) = \sum\limits_{i=0}^{i=n} p_{n-i}(t).p_i(s)$.
   b. En déduire que pour tous réels positifs $t$ et $s$: $q_n(t+s) = q_n(t) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \left(q_{n-i}(t).q_i(s) + q_n(s)\right)$

## D. Détermination de la fonction $p_n$ pour $n$ entier naturel

On note $g_0$ la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par, $g_0(t) = 1$.

Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $g_n$ la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $g_n(t) = \dfrac{(-\ln a)^n.t^n}{n!}$

Pour $n$ entier naturel, on désigne par ($E_n$) l'égalité des fonctions $q_n$ et $g_n$ : $q_n = g_n$.

On souhaite démontrer par récurrence que l'égalité ($E_n$) est vraie pour tout entier naturel $n$.

1. Démontrer que $q_0 = g_0$ et que $q_1 = g_1$.

2. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose dans cette question que l'égalité ($E_k$) est vraie pour tous les entiers $k$ tels que $0 \le k \le (n-1)$.

a. Démontrer alors que, pour tous réels positifs $t$ et $s$:
$q_n(t+s) = q_n(t) + g_n(t+s) - g_n(t) - g_n(s) + q_n(s)$ .
(On pourra utiliser la formule du binôme de Newton).

b. En déduire que $q_n$ est continue à droite en tout réel positif $t$.

c. On pose $\Phi = q_n - g_n$. Démontrer que, pour tous réels positifs $t$ et $s$ , $\Phi(t + s) = \Phi(t) + \Phi(s)$.

d. On pose $\Phi(1) = C$. En suivant une méthode analogue à celles utilisées précédemment, déterminer $\Phi(t)$ en fonction de $t$ et de $C$, pour $t$ nombre réel positif.

e. Démontrer que $C$ est nul. En déduire que $q_n = g_n$.

3. Grâce aux questions précédentes, déterminer les fonctions $q_n$, puis $p_n$, pour $n$ entier naturel quelconque.

## E. Nature de la loi suivie par les variables aléatoires $X_{[0\,;\,t\,]}$

On dit qu'une variable aléatoire $X$, à valeurs dans $\mathbf{N}$, suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ si, pour tout entier naturel $n$, $P(X = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$ .

Déduire de l'étude précédente que la variable aléatoire $X_{[0\,;\,t\,]}$, donnant le nombre de véhicules se présentant au péage au cours d'une durée de $t$ secondes, suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.