# IX – Annexes

# DU FINI À L'INFINI

Le parti pris pour définir la notion de « fini » est le point de vue naïf de l'enfant qui dénombre une collection d'objets.

## Définitions

1. Deux ensembles sont dits équipotents lorsqu'il existe au moins une bijection de l'un sur l'autre.
2. Un ensemble $E$ est dit fini lorsqu'il est vide ou lorsqu'il existe un entier naturel $n$ tel que $E$ soit équipotent à l'ensemble $\{ 1 ; 2 ; ... ; n \}$.
3. Un ensemble est dit infini lorsqu'il n'est pas fini.
4. Un ensemble est dit dénombrable lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

## Notation

Nous noterons $[\![ 1 ; n ]\!]$ l'ensemble $\{ 1 ; 2 ; ... ; n \}$.

## Remarques

1. Soit $E$ et $F$ deux ensembles équipotents et $f$ une bijection de $E$ sur $F$.
   Alors $f^{-1}$ est une bijection de $F$ sur $E$.
2. Le point de vue adopté pour définir un ensemble fini est le point de vue intuitif utilisé pour dénombrer les doigts de la main gauche.
3. Les questions qui se posent à la suite de ces définitions sont les suivantes :
   - l'ensemble $E$ étant un ensemble fini et non vide, l'entier $n$ tel que $E$ soit équipotent à $[\![ 1 ; n ]\!]$ est-il unique? (ou, en langage naïf, va-t-on obtenir le même résultat en comptant les éléments de $E$ de diverses façons ?).
   - un ensemble dénombrable est-il infini ?
   - un ensemble équipotent à un ensemble infini est-il lui même infini ?

La réponse intuitive à chacune de ces trois questions est oui. Les propriétés qui suivent, et qui découlent des définitions adoptées, en apportent la preuve mathématique.

## Propriété 1

Soit deux entiers naturels non nuls $n$ et $p$.

Si $[\![ 1 ; n ]\!]$ est équipotent à $[\![ 1 ; p ]\!]$ alors $n = p$.

Il suffit, en fait, d'établir que, si $[\![ 1 ; n ]\!]$ est équipotent à $[\![ 1 ; p ]\!]$, alors $n \leq p$. (1)
En effet si $[\![ 1 ; n ]\!]$ est équipotent à $[\![ 1 ; p ]\!]$ alors $[\![ 1 ; p ]\!]$ est équipotent à $[\![ 1 ; n ]\!]$. La proposition (1) permet donc d'écrire à la fois $n \leq p$ et $p \leq n$, c'est à dire que $n = p$.

Pour démontrer cette proposition (1) nous allons utiliser un raisonnement par récurrence sur l'entier $n$.

- La proposition est évidente pour $n = 1$ puisque $p \geq 1$.
- Supposons cette proposition vraie au rang $n$ et considérons un entier naturel non nul $q$ tel que $[\![ 1 ; (n+1) ]\!]$ soit équipotent à $[\![ 1 ; q ]\!]$.

On considère une bijection $f$ de $[\![ 1 ; (n+1) ]\!]$ sur $[\![ 1 ; q ]\!]$ et on désigne par $m$ l'image de $(n+1)$ par $f$.
Deux cas sont alors à envisager :

1[er] cas : $m = q$.
La restriction $f^*$ de $f$ à l'ensemble $[\![ 1 ; n ]\!]$ est une bijection de $[\![ 1 ; n ]\!]$ sur $[\![ 1 ; (q-1) ]\!]$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $n \leq q - 1$.

Par conséquent, $n+1 \leq q$.

2ème cas : $m \neq q$

On désigne par $A$ l'ensemble $[\![ 1 ; (q) ]\!] \setminus \{m\}$ (ensemble $[\![ 1 ; (q) ]\!]$ privé de l'entier $m$) et on considère l'application $g$ définie sur $A$ par :

– Si $m \neq 1$, $\begin{cases} g(x) = x \text{ pour tout } x \text{ tel que } 1 \leq x \leq m \\ g(x) = x - 1 \text{ pour tout } x \text{ tel que } m \leq x \leq q \end{cases}$

– Si $m = 1$, $g(x) = x - 1$ pour tout $x$ de $A$

$g$ est une bijection de $A$ sur $[\![ 1 ; (q-1) ]\!]$ et la restriction $f^*$ de $f$ à l'ensemble $[\![ 1 ; n ]\!]$ est une bijection de $[\![ 1 ; n ]\!]$ sur $A$. Il en résulte que $g \circ f^*$ est une bijection de $[\![ 1 ; n ]\!]$ sur $[\![ 1 ; (q-1) ]\!]$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $n \leq q - 1$.

Par conséquent, $n+1 \leq q$ comme dans le premier cas.

Nous avons donc établi la proposition (1) au rang $(n+1)$. Celle-ci est donc vraie pour tout entier $n$.

## Propriété 2

Soit $E$ un ensemble fini non vide.

Il existe un entier naturel $n$ unique tel que $E$ soit équipotent à $[\![ 1 ; n ]\!]$.

## Définition

Cet entier naturel $n$ est appelé cardinal de l'ensemble $E$ et noté $\mathrm{Card}(E)$.

Par convention le cardinal de l'ensemble vide est $0$.

L'ensemble $E$ est fini et non vide donc il existe un entier naturel $n$ et une bijection $f$ de $E$ sur $[\![ 1 ; n ]\!]$.
Soit un entier naturel $p$ et $g$ une bijection de $E$ sur $[\![ 1 ; p ]\!]$.
L'application $g \circ f$ est une bijection de $[\![ 1 ; n ]\!]$ sur $[\![ 1 ; p ]\!]$ et, d'après la proposition précédente, $n = p$.

## Propriété 3

Les parties finies non vides de $\mathbb{N}$ sont les parties majorées de $\mathbb{N}$.

Soit $E$ une partie finie et non vide de $\mathbb{N}$.

Il existe un entier naturel $n$ et une bijection $f$ de $E$ sur $[\![ 1 ; n ]\!]$.
Nous allons montrer par récurrence sur l'entier $n$ que $E$ est majoré.

Si $n = 1$, alors $E = \{ f^{-1}(1) \}$ où $f^{-1}$ désigne la bijection réciproque de $f$.
Tout entier supérieur à $f^{-1}(1)$, par exemple $f^{-1}(1) + 1$, est un majorant de $E$.

Supposons la propriété vraie au rang $n$.
Soit $E$ une partie de $\mathbb{N}$ de cardinal $(n+1)$.

L'ensemble $\{ f^{-1}(1), \ f^{-1}(2), \ \dots \ , f^{-1}(n) \}$ est une partie de $\mathbb{N}$ de cardinal $n$ et possède donc, d'après l'hypothèse de récurrence, un majorant $M$. Or $E = \{ f^{-1}(1), \ f^{-1}(2), \dots , f^{-1}(n), f^{-1}(n+1) \}$.

Ainsi le plus grand des deux nombres M et $f^{-1}(n+1)$ est un majorant de $E$.
La propriété est donc établie au rang $(n+1)$ et nous avons démontré que toute partie finie de $\mathbb{N}$ est majorée.

Réciproquement, soit $E$ une partie majorée et non vide de $\mathbb{N}$.

D'après les axiomes qui permettent de définir l'ensemble des nombres entiers naturels, $E$ admet un plus grand élément $p$.
Nous allons montrer par récurrence sur l'entier $p$ que $E$ est fini.

Si $p = 0$, $E$ a pour seul élément $0$ et l'application qui à $0$ associe $1$ est une bijection de $E$ sur $[\![ 1 ; 1 ]\!]$ ce qui prouve que $E$ est fini.

Supposons la propriété vraie au rang $p$.
Soit $E$ une partie de $\mathbb{N}$ dont le plus grand élément est $(p+1)$.

On considère l'ensemble $F = E \setminus \{ p+1 \}$.
Le plus grand élément de $F$ est inférieur ou égal à $p$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $F$ est fini. Donc il existe un entier naturel $m$ et une bijection $f$ de $F$ sur $[\![ 1 ; m ]\!]$.

L'application $g : \begin{cases} E \to [\![1\,;\, m+1]\!] \\ x \mapsto f(x) \text{ si } x \text{ appartient à } F \\ p+1 \mapsto m+1 \end{cases}$ est une bijection de $E$ sur $[\![\, 1 \,;\, m+1 \,]\!]$.

La propriété est donc établie au rang $(p + 1)$ et nous avons démontré que toute partie majorée de $\mathbb{N}$ est finie.

## Propriété 4

Soit $E$ un ensemble fini non vide et $F$ une partie de $E$, distincte de $E$.

Alors $F$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E)$.

Si $F$ est l'ensemble vide, alors $\mathrm{Card}(F) = 0$ et $\mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E)$.

Supposons donc $F$ différent de l'ensemble vide.
L'ensemble $E$ est fini et non vide donc il existe un entier naturel $n$ et une bijection $f$ de $E$ sur $[\![\, 1 \,;\, n \,]\!]$.
Soit $f^*$ la restriction de $f$ à $F$ et $A$ l'image de $F$ par $f^*$.
L'ensemble $A$ est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par $n$ donc $A$ est fini. Par suite il existe un entier naturel $p$ et une bijection $g$ de $A$ sur $[\![\, 1 \,;\, p \,]\!]$. Il en résulte que $h = g \circ f^*$ est une bijection de $F$ sur $[\![\, 1 \,;\, p \,]\!]$. Donc $F$ est fini et $\mathrm{Card}(F) = p$.

L'ensemble $(E - F)$ est également une partie de $E$ et d'après le raisonnement qui vient d'être fait, $(E - F)$ est fini. On pose $q = \mathrm{Card}(E - F)$.
Par hypothèse, $(E - F)$ est non vide donc $q$ est un entier naturel non nul.
On appelle $k$ une bijection de $(E - F)$ dans $[\![\, 1 \,;\, q \,]\!]$.

Soit $\varphi : \begin{cases} E \to [\![1\,;\, p+q \,]\!] \\ x \mapsto h(x) \text{ si } x \text{ appartient à } F \\ x \mapsto p + k(x) \text{ si } x \text{ appartient à } (E-F) \end{cases}$.

$\varphi$ est une bijection de $E$ dans $[\![\, 1 \,;\, p + q \,]\!]$ car $h$ et $k$ sont des bijections. Par conséquent, $p + q = n$.
Donc $p < n$ et $\mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E)$.

## Propriété 5

Tout ensemble équipotent à l'une de ses parties strictes est infini.

($F$ est une partie stricte de $E$ lorsque $F$ est un sous ensemble de $E$, distinct de $E$).

Soit $E$ un ensemble, $F$ une de ses parties strictes et $f$ une bijection de $E$ sur $F$.
Nous allons démontrer que $E$ est un ensemble infini à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Supposons donc $E$ fini.
D'après la proposition précédente $F$ est fini et $\mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E)$.
Il existe un entier naturel $n$ et une bijection $g$ de $E$ sur $[\![\, 1 \,;\, n \,]\!]$, un entier naturel $p$ et une bijection $h$ de $F$ sur $[\![\, 1 \,;\, p \,]\!]$.
L'application $h \circ f \circ g^{-1}$ est une bijection de $[\![\, 1 \,;\, n \,]\!]$ dans $[\![\, 1 \,;\, p \,]\!]$, d'où $n = p$ et $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, d'où la contradiction.

## Propriété 6

Tout ensemble équipotent à un ensemble infini est infini.

Cette proposition se démontre aisément à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

# DE L'INFINI AU FINI

## Définitions

1. Deux ensembles équipotents sont des ensembles pour lesquels il existe au moins une bijection de l'un sur l'autre.

2. Un ensemble infini est un ensemble équipotent à au moins une de ses parties strictes.

   (On dit qu'un ensemble $A$ est une partie stricte d'un ensemble $E$ lorsque $A$ est inclus dans $E$ et que $A$ est différent de $E$).

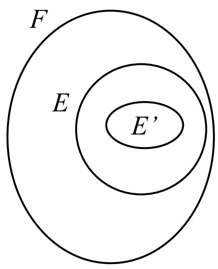
   Un ensemble fini est un ensemble qui n'est pas infini.

3. Un ensemble dénombrable est un ensemble équipotent à $\mathbb{N}$.

## Propriétés

1. L'ensemble vide est fini.

En effet, l'ensemble vide n'a pas de partie stricte.




2. Tout ensemble contenant un ensemble infini est infini.

Soit $F$ un ensemble contenant un ensemble infini $E$.
Par définition il existe une partie stricte de $E$, notée $E'$, et une bijection $f$ de $E$ sur $E'$.
Soit $F'$ l'ensemble des éléments de $F$ qui n'appartiennent pas à $E$.
Montrer que $E' \cup F'$ est une partie stricte de $F$.
Soit $g$ l'application de F dans $E' \cup F'$ définie par :

si $x \in E,\ g(x) = f(x)$

si $x \in F - E,\ g(x) = x$.

Montrer que $g$ est une bijection de $F$ sur $E' \cup F'$.
Conclure.

3. $n$ étant un entier naturel non nul, l'ensemble $I_n = \{ 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n \}$ est fini.

On utilise un raisonnement par récurrence.

a. Quelles sont les parties strictes de $I_1$ ?
En déduire qu'il n'existe aucune bijection de $I_1$ sur une de ses parties strictes.

b. On suppose qu'il existe une bijection, $f$, de $I_{n+1}$ sur une de ses parties strictes, $A$, ne contenant pas $n + 1$ ; soit $r = f(n + 1)$.
Montrer que la restriction de $f$ à $I_n$ est une bijection de $I_n$ sur sa partie stricte $A' = A - \{ r \}$.

c. On suppose qu'il existe une bijection $f$ de $I_{n+1}$ sur une de ses parties strictes $B$ contenant $n + 1$. On pose $p = f(n + 1)$ et $q = f^{-1}(n + 1)$. On appelle $\sigma$ l'échange de $p$ et $q$.
Montrer que $f \circ \sigma \circ f$ est une bijection de $I_{n+1}$ dans $B$ qui laisse $n + 1$ invariant.
En déduire que la restriction de $f \circ \sigma \circ f$ à $I_n$ est une bijection de $I_n$ sur sa partie stricte $B' = B - \{ n + 1 \}$.

d. Mettre la récurrence en forme et conclure.

4. Si $I_n$ et $I_{n'}$ sont équipotents, alors $n = n'$.

On suppose $n' < n$.
$I_{n'}$ est alors une partie stricte de $I_n$. Il en résulte que $I_n$ est infini, ce qui contredit la propriété 3.
Par conséquent $n' \geq n$.
On montrerait de même que $n \geq n'$. Par suite $n = n'$.

5. Un ensemble équipotent à un ensemble infini est infini.

Soit $E$ un ensemble infini et $F$ un ensemble équipotent à $E$.
D'après les définitions précédentes, il existe une bijection $f$ de $E$ sur $F$ et une bijection $g$ de $E$ sur une partie stricte $E'$ de $E$.

a. Montrer que $F' = f(E')$ est une partie stricte de $F$.

b. Montrer que $f \circ g \circ f^{-1}$ est une bijection de $F$ sur $F'$.

c. Conclure.

6. Tout ensemble équipotent à $I_n$ est fini.

On fait un raisonnement par l'absurde en utilisant les propriétés 3 et 5.

7. Pour tout ensemble fini non vide $E$, il existe un unique entier naturel $n$ tel que $E$ soit équipotent à l'intervalle $I_n$ de $\mathbb{N}$. Cet entier $n$ s'appelle le cardinal de $E$ , noté $\text{card } E$ ; par convention $\text{card } \varnothing = 0$.

Soit $E$ un ensemble fini non vide et $x_1 \in E$.

Si $E = \{ x_1 \}$, alors l'application $f_1$ de $I_1$ dans $E$ telle que $f_1(1) = x_1$ est une bijection.
Si $E \neq \{ x_1 \}$, alors il existe $x_2 \in E$ tel que $x_2 \neq x_1$.

Si $E = \{ x_1 ; x_2 \}$, alors l'application $f_2$ de $I_2$ dans $E$ telle que, pour tout élément $i$ de $\{ 1 ; 2 \}$, $f_2(i) = x_i$ , est une bijection.
Si $E \neq \{ x_1 ; x_2 \}$, alors il existe $x_3 \in E$ tel que … etc.

S'il n'existe aucun $n$ tel que $E = \{ x_1 ; x_2 ; ... ; x_n \}$, on construit, à l'aide du procédé ci-dessus, une bijection de $\mathbb{N}$ sur une partie $E'$ de $E$. Cette partie $E'$ est infinie ce qui contredit l'hypothèse « $E$ est un ensemble fini ».
Il existe donc une entier naturel $n$ tel que $E$ soit équipotent à $I_n$ et, d'après la proposition 4, cet entier est unique.

8. Toute partie stricte $F$ d'un ensemble fini $E$ est finie et $\text{card } F < \text{card } E$.

D'après la proposition 2, $F$ ne peut pas être infini.
On pose $n = \text{card } F$.
Montrer que les éléments de $F$ peuvent être notés $x_1, x_2, ..., x_n$ et en déduire que
$E = \{ x_1 ; x_2 ; ... ; x_n ; x_{n+1} ; ... ; x_{n+p} \}$ avec $p \neq 0$. Montrer alors que $\text{card } F < \text{card } E$.

9. Un ensemble $E$ est dénombrable si et seulement si on peut ranger ses éléments en une suite définie sur $\mathbb{N}$.

En effet, si $E$ est dénombrable, il existe une bijection $f$ de $E$ sur $\mathbb{N}$.

La bijection réciproque de $f$, notée $f^{-1}$, est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $E$ et les éléments de $E$ se rangent dans la suite $(f^{-1}(n)) = (u_n)$.

Réciproquement, si les éléments de $E$ ont pu être rangés en une suite définie sur $\mathbb{N}$, l'application qui, à tout élément de $E$, fait correspondre son rang dans la suite $(u_n)$ est une bijection de $E$ sur $\mathbb{N}$. Par suite $E$ est dénombrable.

# AUTANT, MOINS OU PLUS ?

| | |
|---|---|
| **Objectif** | *Initier les élèves, sur des exemples, au concept d'équipotence entre des ensembles.*<br>*Démontrer que des ensembles très différents (du point de vue topologique par exemple) peuvent cependant être équipotents.* |
| **Outils** | *Définition de la bijection.*<br>*Connaissances sur les fonctions.* |

Les mathématiciens introduisent généralement le concept de « nombre d'éléments » d'un ensemble de la façon suivante : deux ensembles $E$ et $F$ ont le même nombre d'éléments s'il existe une bijection de $E$ sur $F$.

En mettant en œuvre cette définition sur des exemples, divers mathématiciens furent fort surpris du fait que des ensembles très dissemblables puissent être mis en bijection l'un avec l'autre, et donc avoir le même « nombre d'éléments ».

On se propose d'étudier certains de ces exemples.

## A. ENSEMBLES FINIS

« Je sais compter le nombre de doigts de ma main parce que je sais attribuer à chaque doigt un numéro et un seul. Par exemple pouce $\mapsto 1$, index $\mapsto 2$, majeur $\mapsto 3$, annulaire $\mapsto 4$, auriculaire $\mapsto 5$.

Ce n'est pas la seule façon possible (index $\mapsto 1$, annulaire $\mapsto 2$, $\ldots$) mais il ne fait aucun doute (?) que le dernier doigt recevra le numéro $5$. Je dis que ma main a cinq doigts. »

En langage savant on dit que l'on a créé une bijection de l'ensemble des doigts vers l'ensemble $\{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 \}$ et que cette bijection n'est pas unique.

D'une manière générale, si on sait construire une bijection d'un ensemble $E$ sur l'ensemble $\{ 1 ; 2 ; \ldots ; n \}$, on dit que $E$ est un ensemble fini de $n$ éléments. La bijection n'est pas unique, mais on concevra que $n$ est unique. $n$ s'appelle le cardinal de $E$.

On dit que deux ensembles de même cardinal ont « autant » d'éléments.

L'ensemble vide n'a pas d'éléments. On dit qu'il a zéro élément ou que son cardinal est $0$.

Si $E$ est un ensemble fini et si $F$ est strictement inclus dans $E$, on dit que $F$ a « moins » d'éléments que $E$ ou encore que $E$ a « plus » d'éléments que $F$.

Mais, dès qu'il s'agit d'ensembles infinis (c'est-à-dire qui ne sont pas finis) les mots « autant », « plus », « moins » deviennent trompeurs…

## B. Ensembles en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

### Exemple 1

Soit $\mathbb{N} = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ \ldots \}$ et $\mathbb{N}^* = \{ 1 ; 2 ; 3 ; \ldots \}$. Il y a manifestement « plus » d'éléments dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{N}^*$, puisqu'on passe de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{N}^*$ en enlevant zéro.

Démontrer cependant qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$ (préciser la bijection utilisée) et donc que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ ont « le même nombre d'éléments »…

Il y a « autant » d'éléments dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{N}^*$…

### Exemple 2

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.
La réaction naturelle est de dire qu'il y a deux fois plus d'éléments dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathcal{P}$.

Démontrer cependant qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}$. Conclusion ?

De même, soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des entiers naturels impairs.
La réaction naturelle est de dire qu'il y a autant d'entiers pairs que d'entiers impairs et qu'il y a deux fois plus d'éléments dans $\mathcal{I}$ que dans $\mathbb{N}$.

Démontrer cependant qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{I}$. Conclusion ?

### Exemple 3

Cet exemple est dû à l'illustre physicien et mathématicien Galileo Galilei, et figure dans le « Discours concernant deux sciences nouvelles », paru en 1638[1].

Galilée considère l'ensemble, que nous noterons $C$, des carrés de tous les entiers naturels non nuls, appelés par lui « nombres carrés ». $C = \{ n^2, \ n \in \mathbb{N}^* \}$. Cet ensemble donne lieu aux réflexions suivantes de Salviati, l'un des personnages du livre de Galilée.

« *Si je demande combien il y a de nombres carrés, on peut répondre, sans se tromper, qu'il y en a autant que de racines* [*carrées*] *correspondantes, attendu que tout carré a sa racine et toute racine son carré, qu'un carré n'a pas plus d'une racine, et une racine pas plus d'un carré.*[…] *; cela étant, il faudra donc dire qu'il y a autant de nombres carrés qu'il y a de nombres, puisqu'il y a autant de racines, et que les racines représentent l'ensemble des nombres ; et pourtant* […] *il y a beaucoup plus de nombres que de carrés, étant donné que la plus grande partie des nombres ne sont pas des carrés. A quoi s'ajoute le fait que la proportion des carrés diminue toujours davantage quand on passe à des nombres plus élevés* […]. ».

1. Démontrer, en suivant l'argumentation de Galilée, que $\mathbb{N}^*$ et $C$ peuvent être mis en bijection l'un avec l'autre. Il y a donc « autant » d'éléments dans $C$ que dans $\mathbb{N}^*$.
2. Pour tout entier naturel non nul $k$, on note $c(k)$ le nombre d'éléments de $C$ inférieurs ou égaux à $k$, et on note $p(k)$ la proportion des carrés parmi les entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à $k$, c'est-à-dire : $p(k) = \dfrac{c(k)}{k}$.
   a. Calculer $p(99)$, $p(100)$, $p(10\,000)$.
   b. Majorer $c(k)$.
   En déduire que $\lim p(k) = 0$. Autrement dit, la proportion des carrés parmi les entiers naturels inférieurs ou égaux à $k$ tend vers $0$ quand $k$ tend vers $+\infty$. Ceci semble montrer qu'il y a « beaucoup plus » de nombres naturels que de carrés.

[1] Éditions PUF - Collection Épiméthée - Traduction de M. Clavelin - pages 30 et 31.

Conclusion
Dans le cas d'un ensemble infini $E$, une partie $P$ de $E$, différente de $E$, peut avoir « autant d'éléments que $E$, au sens qu'il existe une bijection entre $P$ et $E$.

## C. Ensembles en bijection avec des intervalles de $\mathbb{R}$

### Exemple 1. La longueur d'un segment ne permet pas de conclure sur le « nombre d'éléments »

Autre problème qui troubla beaucoup les mathématiciens du passé : il semble qu'il y ait « plus » de points dans un grand segment que dans un petit.

1. Dessiner dans le plan deux segments à supports parallèles, l'un ayant une longueur double de l'autre. Définir géométriquement une bijection du plus petit segment vers le plus grand. En déduire que les deux ensembles ont le « même » nombre d'éléments.

2. Soit deux segments quelconques. Envisager les différents cas de figures possibles et trouver pour chacun d'eux une bijection du premier segment sur le deuxième.

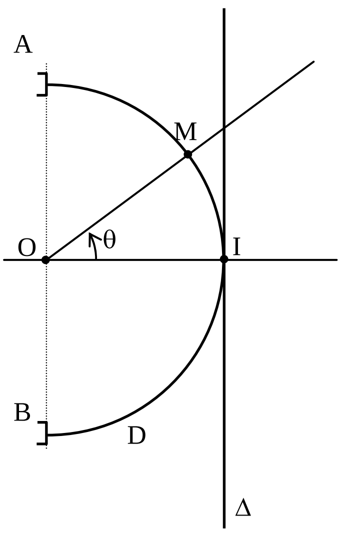
3. Définir une bijection de l'intervalle fermé $[\,-1\,;\,1\,]$ sur l'intervalle fermé $[\,-2\,;\,2\,]$.

Conclusion : il n'y a pas plus de points dans un « grand » segment que dans un « petit », même si le grand contient le petit.

### Exemple 2. Existence de bijections entre ensembles bornés et non bornés

1. Démontrer que $]\,-1\,;\,1\,[$ et $]\,-\infty\,;\,+\infty\,[$ ont le même nombre d'éléments.

   Indication
   Trouver une bijection entre ces deux ensembles, par exemple une fonction rationnelle $f$ admettant $-\infty$ comme limite en $-1$, $+\infty$ comme limite en $1$, strictement croissante sur $]\,-1\,;\,1\,[$. Faire par exemple en sorte que $f$ soit impaire. Tracer la courbe représentative dans un repère de cette bijection $f$.




2. a. Soit $\mathrm{D}$ une demi-cercle de rayon $1$ privé de ses points limites $\mathrm{A}$ et $\mathrm{B}$. Soit $\mathrm{O}$ le milieu de $[\mathrm{AB}]$. Soit $\Delta$ la droite parallèle à $(\mathrm{AB})$ et tangente au demi-cercle ; soit $\mathrm{I}$ leur point de contact.

   Définir géométriquement une bijection $F$ de $\mathrm{D}$ dans $\Delta$.

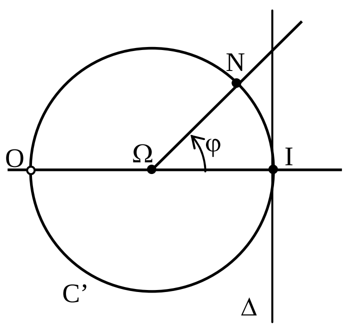
   Pour tout point $\mathrm{M}$ de $\mathrm{D}$, on note $\theta$ la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OI}},\overrightarrow{\mathrm{OM}}})$ appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Soit $\mathrm{M'} = F(\mathrm{M})$ et $y$ la mesure algébrique $\overline{\mathrm{IM'}}$.

   Exprimer $y$ en fonction de $\theta$.

   En déduire une bijection $f$ de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]\,-\infty\,;\,+\infty\,[$.

   b. Soit $\mathrm{C}$ un cercle de diamètre $[\mathrm{OI}]$, avec $\mathrm{OI} = 1$, et $\Omega$ le centre de $\mathrm{C}$. On note $\mathrm{C'}$ l'ensemble $\mathrm{C} \setminus \{\mathrm{O}\}$, et $\Delta$ la droite tangente à $\mathrm{C}$ en $\mathrm{I}$.

   Définir géométriquement une bijection $G$ de $\mathrm{C'}$ sur $\Delta$.



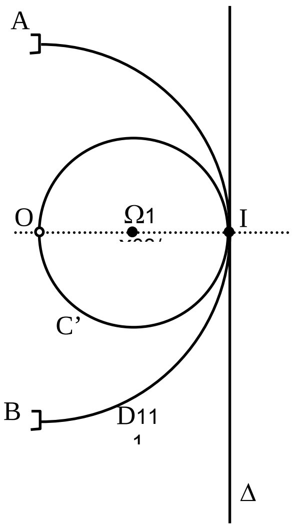
Pour tout point N de C’, on note $\varphi$ la mesure de l’angle $(\widehat{\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega N}})$ appartenant à $]-\pi ; \pi[$.

Soit $N' = G(N)$ et $y$ la mesure algébrique $\overline{IN'}$.

Exprimer $y$ en fonction de $\varphi$.

En déduire une bijection $g$ de $]-\pi ; \pi[$ sur $]-\infty ; +\infty[$.

Conclusion des deux exemples précédents : des ensembles bornés peuvent avoir le même nombre d’éléments que des ensembles non-bornés.




c. On considère la figure obtenue par réunion de celles définies dans les questions précédentes (voir dessin ci-contre). Les applications $F$ et $G$ ont été définies dans ces mêmes questions.

Expliquer à quelle construction géométrique correspond la bijection $F^{-1} \circ G$, de C’ dans D.

On note $H$ cette bijection. Soit N un point quelconque de C’, on note $M = H(N)$. $\theta$ et $\varphi$ sont définies comme dans les questions précédentes.

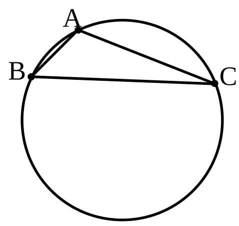
Exprimer $\theta$ en fonction de $\varphi$.

En déduire la bijection correspondante $h$ de $]-\pi ; \pi[$ sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

$a$ et $b$ étant deux réels tels que $a < b$, déterminer la fonction affine $u$ telle que $u(a) = -\pi$ et $u(b) = \pi$.

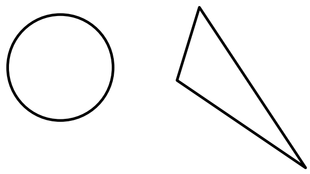
En déduire que tout intervalle $]a ; b[$ peut être mis en bijection avec $\mathbb{R}$

3. Soit un triangle ABC et son cercle circonscrit.




Démontrer qu’il existe autant de points sur l’un quelconque des côtés que sur l’arc correspondant à ce côté (intersection du cercle et du demi-plan limité par le côté et ne contenant pas le troisième sommet).

Inventer une bijection entre le cercle et le triangle représentés ci-contre.



AIDE

Utiliser par exemple des transformations géométriques classiques et le cercle circonscrit au triangle.

## Exemple 3. Existence de bijections entre intervalles ouverts et intervalles fermés ou semi-fermés

On pose $D = \left\{ \dfrac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1 ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{4} ; ... \right\}$ et $D' = \left\{ \dfrac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{4} ; \dfrac{1}{8} ; ... \right\}$

1. Construire une bijection, $g$, de $D'$ sur $D$.

   Construire une bijection, $f$, de $[\,0 ; 1\,[$ sur $[\,0 ; 1\,]$, dont la restriction à $D'$ soit $g$ (c'est-à-dire telle que, pour tout $x$ de $D'$, $f(x) = g(x)$).

   $[\,0 ; 1\,[$ a donc autant d'éléments que $[\,0 ; 1\,]$ !

2. Grâce à la fonction $f$ ci-dessus, définir une bijection de $]\,-1 ; 0\,]$ sur $[\,-1 ; 0\,]$.

   En déduire une bijection de $]\,-1 ; 1\,[$ sur $[\,-1 ; 1\,]$.

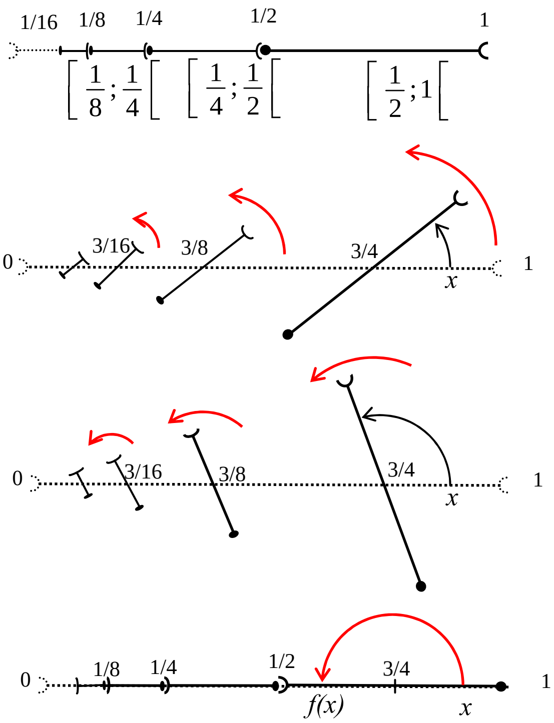
   $]\,-1 ; 1\,[$ a donc autant d'éléments que $[\,-1 ; 1\,]$ !

> Conclusion
> Les ensembles $]\,0 ; 1\,[$ et $[\,0 ; 1\,[$, bien que dissemblables, peuvent être mis en bijection. Il est encore plus surprenant qu'il existe une bijection entre les intervalles $]\,-1 ; 1\,[$ et $[\,-1 ; 1\,]$, l'un ouvert, l'autre fermé.
>
> On peut cependant montrer qu'il n'existe pas de bijection continue entre $]\,0 ; 1\,[$ et $]\,0 ; 1\,]$, ou entre $]\,-1 ; 1\,[$ et $[\,-1 ; 1\,]$. Ces ensembles sont donc bien d'espèces différentes, mais pas du point de vue du « nombre d'éléments ».

3. Plus généralement on peut mettre en bijection tout intervalle $]\,a ; b\,[$ avec les intervalles $[\,a ; b\,]$, $[\,a ; b\,[$, $]\,a ; b\,]$.

   Par exemple, on peut déterminer une fonction affine $u$ telle que $u \circ g \circ u^{-1}(\,]\,a ; b\,[\,) = [\,a ; b\,]$ où $g$ est la fonction utilisée ci-dessus.

### Variante




Voici une application $f$ de $]\,0 ; 1\,[$ sur $]\,0 ; 1\,]$ :

① On décompose $]\,0 ; 1\,[$ en intervalles semi-ouverts à droite de la forme $\left[ \dfrac{1}{2^{n+1}} ; \dfrac{1}{2^n} \right[$, $n$ étant un entier naturel.

② On fait « tourner » chacun des intervalles $\left[ \dfrac{1}{2^{n+1}} ; \dfrac{1}{2^n} \right[$ autour de son centre $\dfrac{1}{2}\left( \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^n} \right) = \dfrac{3}{2^{n+2}}$.

Chaque réel $x$ de $]\,0 ; 1\,[$ acquiert ainsi une nouvelle position $f(x)$, ce qui définit une application de $]\,0 ; 1\,[$ dans $]\,0 ; 1\,]$.

1. Démontrer que $f$ réalise une bijection de $]\,0 ; 1\,[$ dans $]\,0 ; 1\,]$.

> INDICATION
> Soit $D = \left\{ \dfrac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

On pourra montrer séparément que tout élément de $]\,0\,;\,1\,]\setminus D$ a un antécédent unique par $f$, puis qu'il en va de même pour tout élément de $D$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x$ de l'intervalle $\left[\,\frac{1}{2^{n+1}}\,;\,\frac{1}{2^n}\,\right[$, exprimer $f(x)$ en fonction de $x$ et de $n$.

3. Tracer la courbe représentative de $f$ sur $]\,0\,;1\,[$ (le tracé sera forcément imprécis pour les abscisses proches de zéro).

   Constater sur le graphique que $f$ est une bijection de $]\,0\,;\,1\,[$ dans $]\,0\,;\,1\,]$.

4. À partir de la fonction $f$ définie précédemment, on définit une fonction $g$ sur $]\,-1\,;\,1\,[$ par :

   si $x \in\, ]\,0\,;\,1\,[$ alors $g(x) = f(x)$ ;

   si $x = 0$ alors $g(x) = 0$

   si $x \in\, ]\,-1\,;\,0\,[$ alors $g(x) = -f(-x)$.

   Démontrer que $g$ est une bijection de $]\,-1\,;\,1\,[$ sur $[\,-1\,;\,1\,]$

   Tracer la courbe représentative de $g$ (on pourra d'abord démontrer que $g$ est impaire).

## Autres exemples

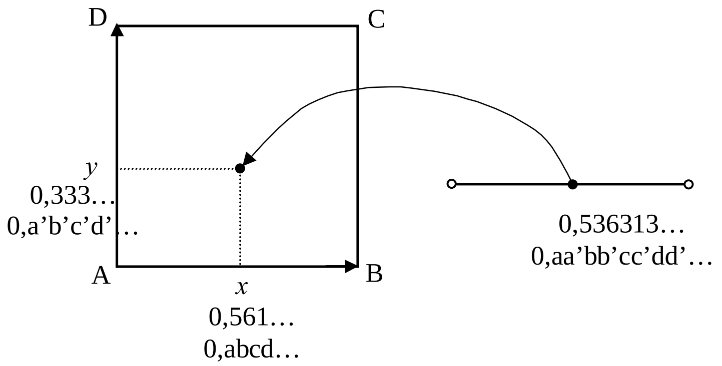
1. Il y a autant de points sur un segment ouvert de longueur $1$ qu'à l'intérieur d'un carré ouvert de côté $1$.

Chaque point du segment ouvert est associé à un nombre et un seul de $]\,0\,;\,1\,[$.

Chaque nombre de cet intervalle possède un développement décimal illimité, unique, non terminé par une suite infinie de $9$ (on complète éventuellement par des $0$.

Chaque point du carré est associé à un couple et un seul de $]\,0\,;\,1\,[\,\times\,]\,0\,;\,1\,[$.

À partir d'un nombre $a$ de $]\,0\,;1\,[$, on crée un couple $(\,x\,;y\,)$ de $]\,0\,;1\,[\,\times\,]\,0\,;1\,[$ de la façon suivante : la décimale de rang $p$ de $x$ est la décimale de rang $2p-1$ de $a$ et la décimale de rang $p$ de $y$ est la décimale de rang $2p$ de $a$ (voir exemple dans le cadre ci-contre).




$a = 0{,}536313098765432$

$x = 0{,}5\ 6\ 1\ 0\ 8\ 6\ 4\ 2$

$y = 0{,}\ 3\ 3\ 3\ 9\ 7\ 5\ 3$

Par ce procédé on met en bijection le carré ouvert avec le segment ouvert.

Montrer de même qu'il y a « autant » de points sur un segment ouvert de longueur $1$ qu'à l'intérieur d'un cube ouvert de côté $1$.

2. Il y a « autant » d'éléments dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

   D'après ce qui précède, il existe une bijection $u$ de $]\,0\,;\,1\,[$ sur $\mathbb{R}$.

   Vérifier que l'application $v : \begin{array}{l} ]\,0\,;1\,[ \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (\,x\,;\,y\,) \mapsto (\,u(x)\,;\,u(y)\,) \end{array}$ est une bijection.

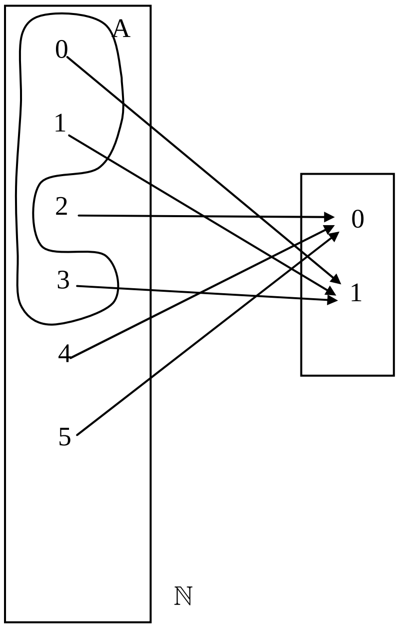
   Montrer alors qu'il existe une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Y a-t-il « autant », « moins » ou « plus » de nombres complexes que de nombres réels ?

3. $\mathrm{O}$ étant un point du plan, démontrer que l'ensemble des rotations planes de centre $\mathrm{O}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{R}$ des réflexions planes d'axe passant par $\mathrm{O}$

> Méthode
> Prendre une droite $\mathrm{D}_0$ passant par $\mathrm{O}$ et étudier l'application qui associe à toute réflexion $s$ la composée $s \circ s_0$, où $s_0$ désigne la réflexion d'axe $\mathrm{D}_0$.
> Ces ensembles sont-ils dénombrables ?

4. Pour toute partie $A$ de $\mathbb{N}$, on note $\chi_A$ l'application de $\mathbb{N}$ vers $\{ 0 ; 1 \}$ définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.




On note $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ et $\mathcal{A}( \mathbb{N} ; \{ 0 ; 1 \} )$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ vers $\{ 0 ; 1 \}$.

a. En étudiant l'application qui à, à tout élément $A$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, associe l'élément $\chi_A$ de $\mathcal{A}( \mathbb{N} ; \{ 0 ; 1 \} )$, démontrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathcal{A}( \mathbb{N} ; \{ 0 ; 1 \} )$ sont en bijection.

b. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{A}( \mathbb{N} ; \{ 0 ; 1 \} )$ est équipotent à $\mathbb{N}$.

> AIDE
> Toute application $\chi_A$ peut être codée à l'aide d'une suite infinie de $0$ et de $1$, $a_0$, $a_1$, $a_2$, … , $a_n$, …, donc à l'aide d'un nombre de la forme $0{,}a_0a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ qui peut être considéré comme l'écriture binaire d'un nombre de l'intervalle $]\, 0 ; 1\, [$.

# DÉNOMBRABLE OU CONTINU ?

| | |
|---|---|
| ***Objectif*** | *Déterminer, pour divers ensembles simples, s'ils sont dénombrables ou continus. Démontrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas équipotents.* |
| ***Outils*** | *Réciproque d'une bijection. Bijection composée de deux bijections.* |

Le propos de cette séquence est d'examiner, pour divers ensembles, s'ils sont dénombrables ou s'ils ont la puissance du continu. Les résultats sont parfois surprenants

Les mathématiciens, suivant les idées de Georg Cantor (1845-1918), distinguent plusieurs sortes d'ensembles infinis. Ils ont adopté les définitions suivantes :

Définitions :

1. Un ensemble E est dit « dénombrable » s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.
2. Un ensemble E a « la puissance du continu » s'il existe une bijection de $\mathbb{R}$ sur E.
3. Un ensemble A est équipotent à un ensemble B lorsqu'il existe au moins une bijection de A sur B.

Un ensemble est donc dénombrable si et seulement si il est équipotent à $\mathbb{N}$ ; un ensemble a la puissance du continu si et seulement si il est équipotent à $\mathbb{R}$.

## Résultats préliminaires

Soit A, B et C trois ensembles.

Démontrer que :

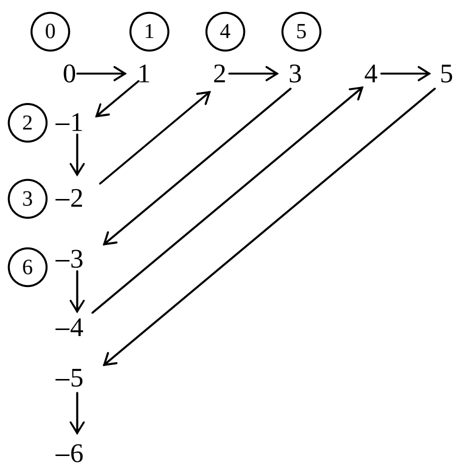
1. Si A est équipotent à B, alors B est équipotent à A.
2. Si A est équipotent à B et B est équipotent à C, alors A est équipotent à C.

## A. Ensembles dénombrables

### 1. $\mathbb{Z}$ est dénombrable

Il existe au moins une bijection, $f$, de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$. Pour présenter une telle bijection, le plus simple est de faire un schéma (voir ci-contre).

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 0 | 1 | –1 | 2 | –2 | 3 | –3 | |



a. Définir explicitement $f(n)$ en fonction de $n$, pour tout entier naturel $n$ (on pourra distinguer les cas $n$ pair et $n$ impair).

b. Démontrer que $f$ est bien une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

c. Soit $f^{-1}$ la bijection réciproque de $f$. Définir explicitement $f^{-1}(m)$ en fonction de $m$, pour tout entier relatif $m$ (on pourra distinguer les cas $m$ positif et $m$ négatif).

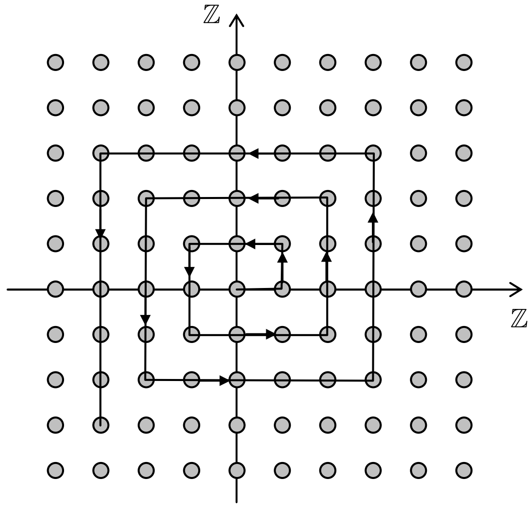
On peut donc dire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

## 2. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est dénombrable

On définit l'application $f$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ par :

« pour tout couple $(m\,;n)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , $f(m\,;n) = 2\,(|m| + |n|)^2 + S\,(n).(|m| + |n| - m)$ où l'on a posé $S\,(n) = +1$ si $n$ est positif ou nul et $S\,(n) = -1$ si $n$ est strictement négatif »

Sur la figure ci-contre, à côté de chacun des points à coordonnées entières $(m\,;n)$ (les plus proches de l'origine, écrire $f(m\,;n)$. Relier chaque point numéroté $p$ au point numéroté $(p+1)$. Quelle semble être la forme de cette « trajectoire » ? Semble-t-elle passer par tous les points à coordonnées entières ?




On peut démontrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$ et ainsi que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est dénombrable :

Pour tout $q$ élément de $\mathbb{N}$, on note $C_q$ l'ensemble des couples $(m\,;n)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $|m| + |n| = q$. Alors tout élément $(m\,;n)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ appartient à un unique ensemble $C_q$ (avec $q = |m| + |n|$).

a. Colorier avec des couleurs différentes, sur la figure ci-contre, $C_0$, $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$.

b. Pour tout entier naturel $q$, on pose : $a_q = 2\,q^2 - 2\,q + 1$, et on note $I_q$ l'intervalle $[a_q\,;a_{q+1} - 1]$. Démontrer que pour tout $q$ de $\mathbb{N}$, $f(Cq) \subset I_q$

c. Soit $q$ un entier naturel. Démontrer que, si deux couples $(m\,;n)$ et $(m'\,;n')$ de $C$ ont même image par $f$, alors ils sont égaux (on pourra exprimer $f(m\,;n)$ et $f(m'\,;n')$ en fonction de $q$, $m$ et $n$). On en déduit que tout élément de $I_q$ a au plus un antécédent par $f$ dans $C_q$.

d. Déterminer le nombre d'éléments de $C_q$ et montrer qu'il est égal à celui de $I_q$. Déduire de ce résultat et de la question précédente que $f$ est bijective de $C_q$ sur $I_q$.

e. Vérifier que la suite $(a_q)$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$. On en déuit que tout entier naturel appartient à un unique intervalle $I_q$. En déduire que $f$ est bijective de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$ . Conclure.

## 3. $\mathbb{Q}$ est dénombrable

Voici comment on peut démontrer ce résultat.

Remarquons tout d'abord que tout nombre rationnel peut être représenté par un infinité de couples de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Par exemple $\frac{3}{4}$ peut être représenté par $(\,3\,;4\,)$, $(\,-3\,;-4\,)$, $(\,6\,;8\,)$, $(\,-6\,;-8\,)$, etc.

Un couple de la forme $(\,n\,;0\,)$ ne représente pas de nombre rationnel.

On peut créer une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$ de la façon suivante : on suit le parcours défini pour $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans le schéma précédent en numérotant les points rencontrés, mais en sautant les points qui ne représentent pas de rationnel ou qui représentent un rationnel déjà numéroté.

a. Sur un schéma semblable à celui ci-dessus, numéroter, en suivant la méthode ci-dessus, les points de coordonnées entières portant les numéros de $0$ à $15$, en barrant au fur et à mesure les points qu'il faudra exclure de la numérotation.

b. Faire la liste ordonnée des nombres rationnels auxquels sont associés par ce procédé les entiers naturels de $0$ à $15$.

## B. ] 0 ; 1[ n'est pas dénombrable

On admet que tout nombre réel de $]\,0\,;1\,[$ possède un unique développement décimal illimité, de la forme 0,..., éventuellement terminé par une suite illimitée de 0, mais non terminé par une suite illimitée de 9, et non constitué exclusivement de zéros.

On dira d'une telle écriture décimale illimitée qu'elle est « standard ».

Exemples :

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2} = 0,5000000.....$<br>$\sqrt{0,6} = 0,7745966692.....$ | $\frac{1}{3} = 0,3333333......$<br>$\frac{1}{\pi} = 0,3183099886.....$ | $\frac{1}{4} = 0,2500000....$ |

Inversement, on démontre que tout développement décimal illimité standard correspond à un et un seul nombre de $]\,0\,;1\,[$.

Pour montrer que $]\,0\,;1\,[$ [ n'est pas dénombrable, on raisonne par l'absurde. On suppose que $]\,0\,;1\,[$ est dénombrable. Alors $]\,0\,;1\,[$ est équipotent à $\mathbb{N}$. Or $\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}$*. Donc $]\,0\,;1\,[$ est équipotent à $\mathbb{N}$*. Il existe alors une bijection $f$ de $\mathbb{N}$* sur $]\,0\,;1\,[$.

On peut alors ranger les nombres de cet intervalle dans un tableau illimité vers la droite et vers le bas (voir ci-contre).

On construit alors un nombre de la façon suivante : le $n$-ième chiffre après la virgule de ce nombre est le $n$-ième chiffre après la virgule du $n$-ième nombre du tableau, augmenté de $1$ ($2$ pour $1$, $3$ pour $2$, … , $0$ pour $9$).

Dans le cas ci-contre ce nombre serait `0,6104`…

Or, de part sa définition, ce nombre ne peut pas figurer dans la liste. En effet, s'il était sur la $n$-ième ligne, son $n$-ième chiffre après la virgule devrait être à la fois $a$ et $a+1$.

$1 \mapsto 0,\boxed{5}36000000000000…$

$2 \mapsto 0,0\boxed{0}0336789145328…$

$3 \mapsto 0,12\boxed{9}456789123123…$

$4 \mapsto 0,122\boxed{3}33444455555…$

… … … …

Il n'existe donc pas de bijection de $\mathbb{N}$* sur $]\,0\,;1\,[$ et, par suite, de $\mathbb{N}$ sur $]\,0\,;1\,[$.

$]\,0\,;1\,[$ n'est pas dénombrable.

## C. Ensembles ayant la puissance du continu

### L'intervalle ] –1 ; 1 [ a la puissance du continu

Pour démontrer ce résultat, il suffit de construire une bijection de $]-1\,;1\,[$ sur $\mathbb{R}$. On peut, par exemple, trouver une fonction rationnelle, impaire, qui soit une bijection de $]-1\,;1\,[$ sur $\mathbb{R}$.

### Tout intervalle ouvert et borné de $\mathbb{R}$ a la puissance du continu

Démontrer que tout intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ est équipotent à $]-1\,;1\,[$, puis conclure.

### $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

a. À l'aide des résultats antérieurs, démontrer par l'absurde que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

b En déduire qu'un ensemble ayant la puissance du continu n'est pas dénombrable

> « L'infini dénombrable » et « la puissance du continu » sont donc bien des infinis différents. On peut d'ailleurs montrer qu'il existe encore d'autres sortes d'infinis... de tels concepts sont quelque peu vertigineux.

## D. D'autres ensembles ayant la puissance du continu

### 1. [ 0 ; 1 [ et [ 0 ; 1][2]

On pose $D = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; ... \right\}$ et $D' = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{8} ; ... \right\}$

a. Construire une bijection, $g$, de $D'$ sur $D$.

Construire une bijection, $f$, de $[ 0 ; 1 [$ sur $[ 0 ; 1 ]$, dont la restriction à $D'$ soit $g$ (c'est-à-dire telle que, pour tout $x$ de $D'$, $f(x) = g(x)$).

$[ 0 ; 1 [$ a donc autant d'éléments que $[ 0 ; 1 ]$ ![3]

b. Grâce à la fonction $f$ ci-dessus, définir une bijection de $] -1 ; 0 ]$ sur $[ -1 ; 0 ]$.

En déduire une bijection de $] -1 ; 1 [$ sur $[ -1 ; 1 ]$.

$] -1 ; 1 [$ a donc autant d'éléments que $[ -1 ; 1 ]$ !

> Conclusion
> Les ensembles $] 0 ; 1 [$ et $[ 0 ; 1 [$, bien que dissemblables, peuvent être mis en bijection. Il est encore plus surprenant qu'il existe une bijection entre les intervalles $] -1 ; 1 [$ et $[ -1 ; 1 ]$, l'un ouvert, l'autre fermé.
>
> On peut cependant montrer qu'il n'existe pas de bijection continue entre $] 0 ; 1 [$ et $] 0 ; 1 ]$, ou entre $] -1 ; 1 [$ et $[ -1 ; 1 ]$. Ces ensembles sont donc bien d'espèces différentes, mais pas du point de vue du « nombre d'éléments ».

c. Plus généralement on peut mettre en bijection tout intervalle $] a ; b [$ avec les intervalles $[ a ; b ]$, $[ a ; b [$, $] a ; b ]$.

Par exemple, on peut déterminer une fonction affine $u$ telle que $u \circ g \circ u^{-1}( ] a ; b [ ) = [ a ; b ]$ où $g$ est la fonction utilisée ci-dessus.

### 2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

Pour tout entier naturel $n$, on définit les ensembles $E_n$ et $E'_n$ suivants :

$$E_n = \left\{ k + \frac{1}{n+1},\ k \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ 1 + \frac{1}{n+1} ; 2 + \frac{1}{n+1} ; 3 + \frac{1}{n+1} ; ... \right\}$$

$$E'_n = E_n \cup \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$$

Définir une bijection $g$ de $E_n$ sur $E'_n$.

Définir une bijection simple $f$ de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout entier naturel $n$, $f(E_n) = E'_n$.

Conclure.

---

[2] Cet exercice figure dans la séquence « Autant, moins ou plus ? »

[3] On peut aussi avoir l'idée de raisonner ainsi : « On a $] 0 ; 1 [ \subset [ 0 ; 1 [ \subset \mathbb{R}$. Or $] 0 ; 1 [$ et $\mathbb{R}$ ont la puissance du continu, donc $[ 0 ; 1 [$ a la même puissance. » Cependant nous n'avons pas démontré le théorème correspondant, qui existe, mais qui est difficile à établir.

## 3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

a. Lemme

Soit $\mathrm{A}$ un ensemble et $\mathrm{B}$ et $\mathrm{C}$ deux parties de $\mathrm{A}$, telles que : $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \varnothing$.
Si $\mathrm{B}$ et $\mathrm{C}$ sont équipotentes entre elles, alors les ensembles $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \setminus \mathrm{C}$ sont équipotents entre eux.

Démonstration :

D'après les hypothèses, il existe une bijection $g$ de $\mathrm{B}$ dans $\mathrm{C}$, de réciproque $g^{-1}$.
Définir à l'aide de $g$ une bijection $f$ de $\mathrm{A}$ sur lui-même telle que $f(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{B}$.
En déduire que $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \setminus \mathrm{C}$ sont équipotents.

b. On rappelle que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents.

Soit l'ensemble $\mathrm{M}$ suivant : $\mathrm{M} = \left\{n + \sqrt{2},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1 + \sqrt{2}\ ;\ 2 + \sqrt{2}\ ;\ ...\right\}$

Démontrer que $\mathrm{M}$ est équipotent à $\mathbb{Q}$.

Démontrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a la puissance du continu.

# Aspect historique de quelques notions d'analyse

# A. CONCEPT DE FONCTION

Le concept de *fonction* est historiquement un des deux concepts centraux de l'Analyse, conjointement avec celui de *limite* (ou d'*infinitésimal*). À partir du Moyen-âge, sinon avant, nombreux furent les travaux mathématiques mettant en jeu ce concept. Mais les fonctions y étaient présentes de façon uniquement implicite, et donc obscure, confuse. Leurs différents aspects n'étaient pas encore unifiés. Ce n'est que très tardivement qu'apparut une définition précise de la notion de *fonction*.

Parcourir l'histoire de cette notion permet d'en montrer les différents aspects, qui tous peuvent et doivent apparaître dans notre enseignement, comme nous y encouragent d'ailleurs les programmes officiels.

Nous distinguerons ici trois aspects majeurs du concept de *fonction*, en traitant dans un autre chapitre des problèmes de *limites*.

– L'aspect calculatoire (ou algébrique), suivant lequel une fonction est définie par une formule. C'est une approche tout à fait naturelle et courante (c'est celle des logiciels de calcul formel). Cependant, elle peut conduire à une définition trop restrictive du concept, ce qui n'a pas manqué de se produire historiquement.

– L'aspect graphique et géométrique, pour lequel une fonction est assimilée à sa courbe représentative dans un repère. Ce point de vue, très fécond, recèle aussi ses difficultés.

– L'aspect intuitif et causal, qui considère une quantité $y$ dépendant d'une quantité $x$ (on dit alors que $y$ varie en fonction de $x$). C'est à la fois l'aspect courant et naïf du concept de *fonction* (il semble naturel, par exemple, que pour un produit donné, le nombre d'unités vendues, $y$, dépende du prix de vente, $x$), et le plus général et le plus abstrait, car le mode de correspondance entre $x$ et $y$ est alors manifestement quelconque, arbitraire.

## 1. L'ASPECT CALCULATOIRE (ALGÉBRIQUE)

Une relation de type calculatoire est la façon la plus simple d'exprimer une fonction.

Remarquons que l'on peut énoncer une telle relation en langage purement rhétorique, c'est-à-dire sans user de notations algébriques littérales, lesquelles ne se généralisèrent qu'au cours de la Renaissance européenne. Lorsqu'Aristote affirme que la vitesse d'un corps dans un milieu est proportionnelle à la force qui le meut et inversement proportionnelle à la résistance du milieu, il énonce bien une relation de « type algébrique » (qui par ailleurs est fausse), que nous noterions $V = k\,F\,/\,R$. Les mathématiciens du Moyen Âge et de la Renaissance utilisent largement le langage des *proportions*, qui sont pour nous les puissances de la variable. Une des formes sous laquelle Kepler exprime sa troisième loi, de façon purement rhétorique, est que la période du mouvement d'une planète est *proportion sesquialtère* de la distance moyenne de cette planète au Soleil. Nous écririons : $T = k\,d^{(3/2)}$. C'est encore ce type de langage qu'utilisent Galilée ou Pascal.

Le triomphe des notations littérales de Viète, Stevin, Descartes, ne peut que renforcer le point de vue algébriste, pour lequel une fonction générale est une combinaison de fonctions de base, obtenue à partir de celles-ci par les quatre opérations, la composition, voire le passage à la limite ou à une primitive ou la sommation de séries. C'est ce point de vue qu'adopte Euler, en 1748, dans son *Introduction à l'Analyse des Infinis*[4]

4 Cité dans « Mathématiques au Fil des Âges » par un groupe de l'IREM sous la direction de J. Dhombres, chez Gauthiers Villars

« *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes [...]. Par exemple : az - 4zz ; az + b √aa - zz,... sont des fonctions de z [...]. La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison de variables et des quantités constantes qui les forment. Elle dépend des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées et combinées entre elles. Ces opérations sont l'addition et la soustraction, la multiplication et la division; l'élévation à une puissance et l'extraction de racines ; à quoi il faut ajouter la résolution d'équations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a plusieurs autres, qu'on nomme transcendantes, comme les exponentielles, les logarithmes, et d'autres sans nombre que le calcul intégral fait connaître.* »

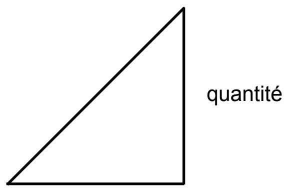
Ce point de vue formel, naturel, peut de révéler très productif. Par exemple, considérer toute fonction comme série de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ a amené les mathématiciens à la théorie des séries entières. Mais il est malgré tout réducteur, et laisse de côté tous les aspects infinitésimaux : les questions de continuité, de limite, de convergence.

## 2. L'ASPECT GÉOMÉTRIQUE ET GRAPHIQUE

Les Anciens Grecs ne voyaient que l'aspect géométrique du concept de *fonction* ; plus précisément, ils s'intéressaient aux seuls problèmes posés et résolus de façon géométrique, en termes de courbes, d'aires et de volumes. Ils franchissent un premier pas vers un concept plus général en considérant l'abscisse et l'ordonnée de points, dans le cas par exemple d'une conique. Traduire les problèmes géométriques en équations entre abscisse $x$ et ordonnée $y$, de façon beaucoup plus générale, par l'analyse du problème, telle est la méthode cartésienne. En établissant ainsi un pont entre la géométrie et l'algèbre littérale, où il excellait, Descartes permet à ces deux domaines de s'enrichir mutuellement, et prépare la voie aux *calculs infinitésimaux* de Newton et Leibniz.

Cependant Descartes s'intéresse peu à la démarche inverse : le passage de la relation algébrique à la courbe. Cette démarche, celle de la représentation graphique, si courante dans notre enseignement, est exprimée clairement par Fermat : « *Dès qu'une équation contient deux quantités inconnues, il y a un lieu correspondant, et le point extrême de l'une de ces quantités décrit une ligne droite ou une ligne courbe* ». Mais la même idée est présente bien plus tôt chez ce grand mathématicien médiéval que fut l'évêque Nicole Oresme :

« *La quantité d'une qualité linéaire*[5] *se doit imaginer à l'aide d'une surface dont la longitude ou base est une ligne tirée au sein du sujet qu'affecte cette qualité, [...] et dont la latitude ou l'altitude est représentée par une ligne élevée sur la base qu'on a tracée* »[6].




Oresme donne les exemples d'une « qualité uniforme ou d'intensité égale en toutes ses parties », qui correspond à notre fonction constante et qu'il représente par un rectangle ; ainsi que d'une « qualité uniformément difforme », notre

[5] Ici « linéaire » n'a nullement le sens de « premier degré », mais veut dire seulement « exprimable en termes de lignes"

[6] Cité par exemple dans « Mathématique au fil des âges »

fonction affine, qu'il représente par un triangle.
Voir ci-contre. Ce texte date de 1350 environ.

Au début du XVIII[e] siècle, Galilée, pour établir la loi du mouvement naturellement (uniformément) accéléré, un des résultats majeurs de l'histoire des sciences (que nous noterions $y = k\,t^2$), se contente de reprendre le graphique ci-dessus d'Oresme et de mener à partir de ce graphique une démonstration elle aussi d'origine médiévale.

La grande explosion de l'Analyse Infinitésimale aux XVII[e] et XVIII[e] siècles est fondée principalement sur le modèle géométrique du concept de *fonction*, chez Barrow, chez Pascal, chez Leibniz[7]. Une fonction générale apparaît le plus souvent chez les mathématiciens de cette époque comme une *ligne* (nous dirions une courbe représentative). Le terme même de *fonction* désigne d'abord, chez Leibniz qui l'introduisit en mathématiques, diverses grandeurs géométriques liées à la courbe, non seulement, comme pour nous, l'ordonnée, mais par exemple la sous-tangente, la sous-normale etc. Le progrès décisif accompli par Newton et Leibniz est de poursuivre la méthode cartésienne en engendrant, à partir du modèle géométrique, un *calcul* différentiel et intégral, avec ses propres algorithmes, lesquels peuvent être menés indépendamment de considérations graphiques. Cependant la légitimité et le fondement ultime de ce calcul résident dans l'intuition géométrique (ou cinématique).

Du point de vue de la découverte (heuristique), l'utilité du point de vue graphique est éclatante, nous venons de le voir. Mais l'intuition géométrique peut être aussi trompeuse. Elle empêche de considérer des fonctions radicalement irrégulières, par exemple discontinues sur un ensemble dense, ou bien continues sur $\mathbf{R}$ et dérivable en aucun réel. Or ces fonctions "pathologiques" présentent un grand intérêt mathématique et même physique (rentrent parmi elles le mouvement brownien, ou différentes fonctions fractales fort utiles en Physique), et leur étude approfondie sera menée à bien au XIX[e] siècle.

## 3. L'ASPECT $Y$ DÉPENDANT DE $X$

Une quantité $x$ détermine totalement une autre quantité $y$. On ne saurait faire aucune étude quantitative d'un phénomène naturel sans avoir recours à un tel modèle, qui est de nos jours omniprésent, non seulement dans les Sciences Expérimentales, mais aussi en Économie, dans les diverses technologies, dans d'innombrables domaines de la vie moderne[8]. Historiquement, il fallut attendre, avec Kepler et Galilée, la naissance de la Physique, centrée sur le numérique, l'observation et l'expérience, pour qu'émerge cet aspect causal du concept de fonction.

Cependant le concept abstrait et général de *correspondance* n'était pas encore dégagé, les fonctions mises en jeu se réduisant en fin de compte soit à des tableaux numériques, soit à des formules algébriques spécifiques au problème étudié. Un pas vers la généralité fut fait à l'occasion de l'équation des cordes vibrantes $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ posée en 1747 par d'Alembert, et pour laquelle il donne la solution $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$. Le statut des fonctions $f$ et $g$ fait alors problème : d'Alembert pense qu'elles doivent être « analytiques », c'est-à-dire exprimables par une formule, tandis qu'Euler affirme qu'elles peuvent être

---

7 Le modèle cinématique est également essentiel, par exemple chez Newton (voir la notice sur la dérivée) ; il intervient généralement en étroite conjonction avec une modélisation géométrique (voir l'exemple cité plus haut, chez Galilée).

8 Parmi ces fonctions, occupent une place à part, par l'intuition spécifique qu'elles mettent en jeu, les fonctions du temps, $t \mapsto X$, par exemple, mais non exclusivement : cinématiques.

arbitraires, correspondant à des courbes tracées « à main libre »[9]. Après cette équation des cordes vibrantes, l'équation de la chaleur, puis les problèmes posés par la convergence des séries de Fourier, contraignent les mathématiciens à considérer de très vastes classes de fonctions, dépassant les limites des aspects algébriques (§1) ou géométrique (§2) du concept.

Comme dans le domaine du continu numérique, apparaît alors la nécessité d'une clarification rigoureuse et précise, qu'apporte la définition élémentaire et générale de la fonction, dans le cadre de la théorie des ensembles, que nous utilisons aujourd'hui. Remarquons pour finir que l'histoire n'est jamais achevée, et que cette définition ensembliste s'est révélée trop étroite pour certains problèmes issus des mathématiques ou de la technologie (électronique) ; il a fallu considérer des *fonctions généralisées*, les *distributions* de Monsieur Laurent Schwartz, nouvel avatar du concept, sans doute pas le dernier.

## B. Nombres réels, limites, continuité

Du point de vue historique, les concepts centraux de l'Analyse sont ceux de *limite* et de *fonction*.

Si l'un de ces deux concepts est absent d'un travail mathématique, il ne s'agit pas à proprement parler d'Analyse. Les Grecs de l'Antiquité ont poussé très loin leur réflexion sur ce que nous appellerions « continu numérique, mais on ne peut dire qu'ils faisaient de l'Analyse, car ils ne disposaient pas du concept général de *fonction* ; symétriquement, les études des applications linéaires ou affines, en collège, ou celles des fonctions de référence, en seconde, ne peuvent prétendre au titre d'Analyse car le concept de limite en est absent ; l' Analyse proprement dite est abordée en classe de Première.

Nous nous intéressons donc ici à l'un de ces deux pôles de l'Analyse : la notion de limite, et à deux concepts qui lui sont fortement liés : ceux de nombre réel et de continuité. Nous étude portera d'abord sur les êtres mathématiques que l'on pourrait qualifier d'immobiles, les nombres réels et la droite numérique, puis nous les verrons s'animer, sous l'effet des suites et des fonctions. Se poseront alors les questions de convergence et de continuité.

### 1. Le continu numérique

L'ensemble $\mathbf{R}$. aussi appelé « droite réelle », ou encore, d'un terme un peu vieilli mais évocateur, « continu numérique », est le socle sur lequel est bâti toute l'Analyse. Cependant, la théorie correspondante, après un début brillant dans l'Antiquité grecque, fut presque totalement délaissée

jusqu'au XIX^e^ siècle. Il est vrai que la définition de $\mathbf{R}$ est difficile, et notre enseignement en témoigne encore : la propriété fondamentale de $\mathbf{R}$, et donc de l'Analyse, par exemple sous la forme de l'axiome de la borne supérieure[10], n'est présentée aux étudiants que dans l'enseignement supérieur.

On voit pourtant les Grecs, très tôt, s'intéresser à ce concept. Leur exigence de rigueur, de logique et d'abstraction, qui leur est si spécifique, leur fit obligation de donner une définition précise du *nombre*, dès lors qu'avait éclaté le scandale de l'incommensurabilité entre le côté du carré et sa diagonale (en termes modernes, l'irrationalité de $\sqrt{2}$). Ce projet aboutit à la théorie des proposions, attribuée à Eudoxe, exposée par Euclide.

9 Cette position d'Euler contredit le texte du mène auteur cité au §1.

10 Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

À partir de grandeurs de même nature (par exemple des longueurs ou des aires) susceptibles d'être additionnées, ainsi que d'être multipliées de façon externe par les entiers (sous la forme $G \mapsto n.G$), cette théorie s'intéresse aux rapports, ou proportions, de ces grandeurs, de la forme $G / H$, définissant d'abord l'égalité des proportions, puis leur somme et leur produit. Un « nombre » comme $D / C$, rapport de la diagonale du carré à son côté, peut alors être défini comme une telle proportion, et rentre dans un champ opératoire. Cette théorie est essentiellement équivalente aux constructions modernes de $\mathbf{R}$ comme sur-corps complet de $\mathbf{Q}$ dans lequel $\mathbf{Q}$ soit dense.

Cependant, fort abstraite, cette théorie fut assez vite délaissée, et rares furent désormais les mathématiciens (Arabes, Indiens, Européens de la Renaissance), à s'interroger sur le statut de nombre « continu ». L'Analyse, dès lors, qui s'élevait si haut aux XVII^e^ et XVIII^e^ siècles, manquait d'assise. Il faut attendre le XIX^e^ siècle pour que progresse l'étude du continu numérique : énoncé, par Bolzano et Cauchy, du « critère de Cauchy », équivalent logique de la propriété de la borne supérieure ; énoncé par Cauchy de la propriété elle aussi équivalente des « intervalles emboîtés ». Il revient à Weierstrass, Dedekind, Mérey, Cantor, de procéder à la construction de $\mathbf{R}$ à partir de $\mathbf{Q}$ par des méthodes variées, sans se fonder, comme le faisait Eudoxe, sur des propriétés admises des grandeurs géométriques. La voie est alors ouverte pour des études extrêmement subtiles des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ ; citons à ce propos seulement deux noms : Borel et Baire.

## 2. LIMITE[11]

La limite est une notion qui, dès les origines, fut implicitement au centre de l'Analyse, mais elle ne fut formalisée que très tard, comme celles de nombre réel (cf. §1) et de continuité (cf. §3). Remarquons une fois encore qu'il en va de même dans notre enseignement : la formalisation vient bien après la manipulation des concepts.

Son histoire commence de façon éclatante, avec Zénon d'Élée (né vers 490 avant J. C.). Les paradoxes de ce philosophe révèlent une méditation profonde sur la notion de continu, et contiennent en germe le concept de limite. Chacun d'eux, considérant un ou plusieurs objets mobiles (Achille et la tortue dans le second des paradoxes), démontre l'impossibilité du mouvement.

Le concept clé, sous jacent dans ces raisonnements, est celui d'*indivisible*, c'est-à-dire de particule infiniment petite d'espace ou de temps, provenant semble-t-il de la célèbre théorie atomistique de Démocrite (vers –475 à –380). L'indivisible est un concept historiquement très important, même s'il est logiquement paradoxal, et s'il se trouva totalement discrédité lors de la formalisation des mathématiques[12]. Les énoncés paradoxaux de Zénon provoquèrent, plus qu'un approfondissement des concepts, une réaction de rejet envers l'infini actuel et les indivisibles exprimée avec clarté par Aristote (-384 à -322) dans sa Physique. Il écrit : « Nul continu n'est sans partie ».

Archimède (-287 à -212), le grand ancêtre des Analystes allie la prudence d'Aristote à la témérité de Démocrite. Prenons l'exemple de la quadrature de la parabole, la détermination de l'aire $A$ délimitée par la parabole et un segment joignant deux de ses points[13].

---

11 On trouvera quelques précisions sur ce thème dans la séquence : « Limites de suite : un historique ».

12 Ce concept d'infiniment petit a été réhabilité, à partir de 1970, par l'Analyse non-standard, qui se place à un niveau supérieur de difficulté et d'abstraction. Il continue de susciter l'inspiration des mathématiciens.

13 Voir « Mathématiques et mathématiciens », Dedron et Itard, édition Magnard, pages 93 à 97. Voir aussi la séquence « La parabole carrée »

Archimède présente une première méthode où $A$ est supposée aussi proche qu'on le souhaite de la somme d'aires de triangles en progression géométrique. Nous pouvons interpréter cette méthode en termes de limite, puisque, pour nous, cette somme indéfinie tend vers $4/3$. Mais cette conception « dynamique » manque chez Archimède. Il mène une démonstration suivant la méthode apagogique d'Eudoxe, en prouvant que les deux éventualités $A < 4/3$ et $A > 4/3$ sont toutes deux impossibles.

La seconde méthode d'Archimède figure dans sa « lettre à Ératosthène », et met en jeu les indivisibles. Il admet qu'elle manque de rigueur, mais il insiste sur le fait que, contrairement à la précédente, elle permet la découverte. Elle consiste, dans un raisonnement d'une grande virtuosité, à décomposer la surface en segments, puis à équilibrer ces segments un à un, de part et d'autre d'un point d'appui, avec les segments d'un triangle connu. Le « masse », et donc l'aire $A$ peut alors être exprimée en fonction de l'aire du triangle, connue, et de deux longueurs, elles aussi connues.

Les mathématiciens médiévaux, puis ceux de la Renaissance et de l'âge classique, adaptèrent avec beaucoup plus de hardiesse le point de vue des indivisibles. Ceux-ci furent sans doutes favorables à l'invention, au défrichage d'un nouveau champ mathématique, mais les raisonnements perdaient en logique et en précision.

Nombreux cependant étaient les mathématiciens qui savaient traduire le langage des « infiniment petits » par des termes très proches de notre conception actuelle de la limite. Citons Blaise Pascal, qui après avoir souligné que « *ces deux méthodes ne diffèrent entre elles qu'en la manière de parler* », expose que « *par la somme des ordonnées d'un cercle* » (l'aire d'un demi disque), « *on n'entend autre chose sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles fait de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre dont la somme ne diffère de l'espace d'un demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée* ». Voici le concept de limite exposé avec clarté. Newton quant à lui rejette les indivisibles et essaie d'exprimer, avec une certaine confusion, une défense de la notion de limite : « *...ce que je dirai des sommes et des quotients doit toujours s'entendre non des particules détermines, mais des limites des sommes et des quotients de particules évanouissantes* », et plus haut, à propos du nombre dérivé : « *Il faut entendre par dernier quotient des quantités évanouissantes le quotient qu'ont entre elles ces quantités qui diminuent, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles se sont évanouies, mais au moment même où elles s'évanouissent* ».

Pour que la rigueur triomphât, il fallut qu'elle devînt indispensable au progrès de la découverte, alors que les problèmes qui se posaient aux Analystes devenaient de plus en plus subtils et difficiles. Gauss, et surtout Cauchy, commencèrent à rechercher la précision, même si le dernier use encore d'un langage à l'ancienne : « *Lorsque les valeurs numériques d'une même variable décroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit [...] une variable de cette espèce a zéro pour limite* »[14]. Il faut attendre Karl Weierstrass pour voir écrire notre définition de la limite, en $\varepsilon$ et $\alpha$.

## 3. Continuité

À l'âge « classique » de l'Analyse, les XVII^e et XVIII^e siècle, alors que les fonctions étaient considérées sous leurs seuls aspect graphique (les

[14] Remarquer que le verbe « décroissent » introduit l'idée, parasite, de monotonie.

« lignes »), ou algébrique (définies par une formule), la continuité ne pouvait qu'aller de soi, et donc passer quasiment inaperçue. Étrangement, elle était plus objet de réflexion dans les champs de la Physique ou de la Philosophie, où il apparaissait clairement que « la Nature ne fait pas de saut ». Des penseurs comme Leibniz ou Newton s'y intéressèrent. Mais ces considérations ne conduisaient pas à une formalisation mathématique.

Dans le domaine des mathématiques, c'est par le biais du « théorème des valeurs intermédiaires » que la continuité intervenait, sans être explicitée[15]. Ce théorème intervient d'abord dans le contexte de l'approximation de la racine d'une équation, sous la plume du Hollandais Simon Stevin (en 1594) : soit $P(x)=Q(x)$ cette équation, où $P$ et $Q$ sont des polynômes tels que $P(0)<Q(0)$. On substitue d'abord à $x$ les nombres $10$, $100$, $1000$... jusqu'à ce qu'on ait: $P(x)>Q(x)$ ; ceci dorme le nombre de chiffres de la racine. Supposons que $x$ ait deux chiffres ; on remplace $x$ par $10$, $20$, $30$... pour obtenir le chiffre des dizaines ; puis on cherche le chiffre des unités, puis les autres chiffres décimaux « *et procédant ainsi infiniment, l'on approche infiniment plus près au requis* ». Le « théorème des valeurs intermédiaires », sous la forme de l'affirmation qu'un polynôme ne peut changer de signe sans s'annuler, est également admis comme évident par Lagrange et Gauss (en 1799) au cours de la démonstration du théorème de d'Alembert (tout polynôme à coefficients réels admet une racine, réelle ou complexe). C'est au profond penseur que fut Bernhard Bolzano que l'on doit le refus d'établir le théorème des valeurs intermédiaires sur la simple évidence géométrique (sur la courbe), ou cinématique (en considérant un mouvement), ainsi que sa première démonstration rigoureuse, à partir du critère « de Cauchy », en 1817.

Auparavant, Bolzano avait défini la continuité (uniforme) d'une fonction sur un intervalle, en termes presque modernes : « *Si x est une valeur quelconque, la différence f( x + w ) - f(x) peut être rendue plus petite que toute valeur donnée si l'on peut toujours prendre w aussi petit que l'on voudra* ». Il avait aussi, supérieur en cela à Cauchy, introduit les notions de continuité en un point, de continuité à droite et à gauche, et il avait démontré la continuité des fonctions polynômes. Son contemporain Cauchy donnait une définition analogue de la continuité (uniforme sur un intervalle) ; « *La fonction f(x) restera continue par rapport à x [...] si un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même* ». On remarquera que le vocabulaire est encore de type infinitésimal. Quelques années plus tard, Weierstrass utilise à la fois notre vocabulaire actuel et le langage des infiniment petits pour définir la continuité (uniforme) : « *S'il est possible de définir une borne ∂ telle que pour toute valeur de h, plus petite en valeur absolue que ∂ , f( x + h ) - f(x) soit plus petite qu'une quantité ε aussi petite que l'on veut, on dira qu'on fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable une variation infiniment petite de la fonction* ».

Pour conclure, nous constatons que la rigueur ne fut pas le souci principal des Analystes (sinon, paradoxalement, des tout premiers, les Grecs), et qu'il fallut une très longue démarche historique pour obtenir des axiomes et des définitions précis sur les nombres, les limites, les fonctions. La rigueur logique couronna l'édifice de l'Analyse. Mais elle en constitue aussi la fondation.

15 Nous suivons dans ce paragraphe le chapitre « Nombres réels » de l'ouvrage « Éléments d'Histoire des Mathématiques », de Bourbaki, chez Herman.

# C. Dérivée

## 1. Le concept de dérivée dans les programmes de lycée

Comme celle de la plupart des notions mathématiques, l'histoire du concept de *dérivée* est complexe. Pour l'aborder de façon plus claire, nous prenons le parti de la comparer avec la présentation que donnent de ce même concept les programmes actuels de lycée.

La dérivée est la notion centrale du programme d'Analyse. La dérivabilité en un réel $x_0$ et l'éventuel nombre dérivé en $x_0$ sont d'abord définis à partir du concept de limite (en $0$ ou en $x_0$). Il s'agit là de notions locales qui ne dépendent que des restrictions de la fonction au voisinage du réel considéré. Le nombre dérivé, s'il existe, s'interprète de plusieurs façons : numériquement, en termes d'approximation affine ; géométriquement, en terme de tangente ; cinématiquement, en terme de vitesse instantanée ; en économie, il est lié aux quantités marginales. Dans un second temps, on passe du local au global, en définissant la dérivabilité sur un intervalle, et la *fonction dérivée*. On s'intéresse alors aux variations de la fonction que l'on dérive, et aux problèmes d'optimisation. On développe de purs calculs, des algorithmes de dérivation : dérivées des fonctions de référence, dérivées de fonctions obtenues en composant d'autres fonctions par les opérations classiques : $+$, $-$, $\times$ , ./., $\circ$. C'est ce travail algorithmique que réussissent si bien les logiciels de calcul formel. En terminale, l'intégrale est définie à partir des primitives, c'est-à-dire en fin de compte en se ramenant au concept de *dérivée* ; on étudie aussi les équations différentielles.

Comme souvent en histoire des mathématiques, l'approche pédagogique, que nous venons de présenter et l'approche historique du concept de dérivée diffèrent fortement. Mais avant d'insister sur les divergences, recherchons les points communs entre ces deux approches, et examinons ce faisant en quoi l'histoire des mathématiques peut nous aider à réfléchir sur notre enseignement.

## 2. Approche pédagogique et approche historique : points communs

1. Didactiquement comme historiquement, on ne saurait établir un calcul différentiel sans posséder le concept de *fonction*[16]. C'est pourquoi nous lui donnons une telle importance, dès la classe de seconde (voire dès le collège). Cependant, historiquement, cette notion a émergé parallèlement, et non préalablement, au calcul différentiel, et sous des aspects variés – courbes représentatives (au XVII[e] siècle, on disait « lignes ») – formules algébriques – lois de mouvement (la variable est alors le temps). Le concept moderne de *fonction* est plus abstrait et plus général, mais ces anciennes représentations ont abondamment prouvé leur puissance et leur fécondité, même si elles n'allaient pas sans certaines naïvetés.

2. Deuxième point commun entre notre enseignement et l'évolution historique du concept de dérivée : l'importance du *point de vue cinématique*. C'est grâce à lui qu'a pu se forger une intuition du nombre dérivé, comme vitesse instantanée d'un mobile se déplaçant sur un axe. Il est à l'origine de l'une des deux formalisations du calcul différentiel, celle d'Isaac Newton qui, à partir d'une quantité $x$ qui varie (la fluente) considère la variation de $x$ (la fluxion, notée $\dot{x}$), façon de voir équivalente à notre opération de dérivation qui à partir de $f$ donne $f'$.

[16] Voir la notice sur le concept de *fonction*.

Dès avant Newton, la représentation cinématique avait une importance primordiale, due à ses aspects intuitif et physique. C'est en se plaçant à ce point de vue que Galilée intègre l'équation différentielle $y' = C\,t$ (par une méthode sommatoire, d'origine médiévale), et que ses successeurs déterminent diverses primitives, donc, par renversement de la démarche, diverses vitesses de mouvements, ainsi que de nombreuses tangentes, en décomposant le mouvement suivant deux axes perpendiculaires : ce fut le travail, en particulier, de Torricelli, de Roberval, de Barrow, le maître de Newton. On voit donc que la cinématique est historiquement la source principale de la notion de dérivée.

3. L'histoire et l'enseignement se rejoignent également dans l'intérêt qu'ils portent aux problèmes d'optimisation. « Kepler, en 1615, fait l'observation, que l'on trouve déjà chez Nicole Oresme et qui n'avait pas échappé même aux astronomes babyloniens, que la variation d'une fonction est particulièrement lente au voisinage d'un maximum »[17]. Pierre de Fermat, surtout, s'intéresse à ce type de problèmes, qu'il résout par une méthode d'ailleurs plus algébrique qu'analytique, que nous interpréterions comme un cas particulier d'équation $f'(x_0) = 0$. Il applique sa méthode (« l'adégalisation ») aux déterminations de tangente et à retrouver les lois de Descartes sur la réfraction, par une minimalisation de la durée du trajet de la lumière (principe de Fermat). Wilhelm Leibniz accorde une grande importance aux problèmes d'optimisation, jusqu'à prétendre que le monde où nous vivons est « le meilleur des mondes possibles », affirmation qui suscite les railleries de Voltaire.

4. Quatrième coïncidence : au cours de l'histoire de l'Analyse comme dans la plupart des exercices que nous proposons aux élèves, l'aspect *global* éclipse largement l'aspect *local*. Ce point de vue *global* permet de développer tout le côté algorithmique du calcul des dérivées, mais il néglige les difficultés qui peuvent se poser aux points « singuliers ». Ce privilège du *global* par rapport au *local*, de la fonction dérivée par rapport au nombre dérivé demande peut-être à être nuancé. Il reste que le calcul différentiel, celui de Leibniz ou de Newton, avec toute sa puissance et sa simplicité, est un des grands triomphes des mathématiques.

## 3. Approche pédagogique et approche historique : contrastes

- Remarquons tout d'abord qu'historiquement l'idée d'*intégrale* précède le concept de *dérivée*, à l'inverse du déroulement de notre enseignement. L'Analyse tire en effet son origine de divers problèmes qui se posaient aux mathématiciens, et qui furent d'abord géométriques. Il s'agissait d'un nombre réduit de problèmes de tangentes, mais surtout de problèmes de type sommatoire (nous dirions aujourd'hui de type intégral), qui sont apparus dès Archimède : quadratures (c'est-à-dire calculs d'aires), rectifications, déterminations de centre de gravité. Il faut attendre Newton pour que la notion de dérivée soit mise au premier plan, comme elle l'est dans notre enseignement.

- Le concept de *limite*, qui est primordial dans notre enseignement, n'occupe pas cette place centrale dans l'histoire des mathématiques. La plupart des mathématiciens, avant le XIXe siècle, utilisaient plutôt le concept d'*indivisible*, ou d'infiniment petit, lequel n'était pas compatible avec la rigueur logique de l'exposé, mais constitua une source d'inspiration majeure pour les Analystes : Cavalieri, Pascal, Leibniz et ses disciples. C'est cette notion d'infinitésimal qui sous-tend les différentielles de Leibniz, le fameux « $dx$ », mais aussi la notation

[17] Citation des « Éléments d'Histoire des Mathématiques », par Bourbaki, chez Herman, pages 221-222

« $o$ » de Newton (qui, avec les notations de Leibniz, ne serait autre que $o = dt$). Malgré le beau texte de d'Alembert « Sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal » (I768), qui rejette toute considération d'indivisible, exposant avec clarté le concept de limite, et la façon dont s'en déduit celui de nombre dérivé, il faut attendre le XIX^e siècle pour que la limite soit mise au premier plan, et discréditées les idées infinitésimales[18]. Force est donc de constater que l'Analyse reposa pendant longtemps plus sur l'intuition que sur la rigueur.

- L'analogie entre *discret* et *continu*, peu exploitée dans notre enseignement, contribua en revanche de façon appréciable aux progrès historiques de l'Analyse, et ce, même si cette analogie était difficilement formalisable, plutôt de l'ordre de l'intuition. Elle est à la source de plusieurs découvertes de Blaise Pascal, et permit la naissance du calcul différentiel dans les travaux de Leibniz. On retrouve trace de cette analogie dans les deux sens du mot « somme » : somme discrète de nombres ou intégrale, et dans le parallèle entre différence et différentielle.

Dans le domaine de la dérivée comme dans beaucoup d'autres, le progrès historique et la progression didactique, s'ils se recoupent parfois, ne sauraient coïncider : l'histoire est beaucoup plus complexe, emmêlée, touffue, que ne pourrait l'être aucun enseignement. Mais l'enseignant peut trouver dans l'histoire des concepts une source de réflexion et d'inspiration.

18 Voir la notice historique sur « nombres réels, limite, continuité ». L'Analyse non standard permet de donner un sens aux infiniment petits.

# D. INTÉGRATION[19]

## 1. L'ORIGINE GÉOMÉTRIQUE DE L'INTÉGRATION

L'origine de l'intégration se trouve sans conteste dans les problèmes d'ordre géométrique que se posaient les Grecs : calculs d'aires (ou quadratures), de volumes, de longueurs (rectifications), de centres de gravité, de moments. Les précurseurs grecs du calcul intégral sont cependant peu nombreux. On peut les résumer à Eudoxe et Archimède. On attribue à Eudoxe, repris par Euclide, la détermination des volumes du cône et de la pyramide. Le travail d'Archimède est bien plus important : citons, entre autres, la détermination du centre de gravité d'une surface triangulaire, le rapport entre aire et périmètre du cercle, le volume et l'aire de la sphère, le volume de la calotte sphérique, l'aire du « segment » de parabole, délimité par celle-ci et une de ses cordes.

## 2. DEUX MÉTHODES CONCURRENTES

Dès ces premiers balbutiements du calcul « intégral », celui-ci se trouve déjà partagé entre deux types de méthodes, que l'on trouve d'ailleurs toutes deux chez un même auteur, Archimède. La première méthode est la méthode dite « apagogique », due à Eudoxe, qui est à peu près équivalente à notre concept de limite, consiste à utiliser une suite de valeurs approchées de la quantité à déterminer, par exemple une aire, et de déduire de cette suite la valeur explicite de l'aire.

Mais Archimède utilise parallèlement une seconde méthode, dans laquelle on décompose par exemple une surface en segments parallèles puis on récupère. la surface comme somme des segments infiniment petits. appelés indivisibles[20]. Cette méthode pose de graves problèmes logiques, aussi a-t-elle été abandonnée à partir du XIXème siècle. Elle paraissait déjà douteuse aux Grecs, au point qu'Archimède n'en fait part que dans un courrier « privé », sa fameuse « lettre à Ératosthène »[21].

## 3. LES DÉCOUVERTES ARABES

Les Arabes, qui ont lu Archimède, s'inspirent de ses travaux et les prolongent avec dextérité et pertinence, en calculant divers aires et volumes par la considération de « sommes de Riemann ». Le fameux physicien et mathématicien Ibn al-Haytham (mort après 1040) utilise cette méthode pour calculer, par exemple, le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner la partie de parabole limitée par un segment perpendiculaire à son axe autour de ce même segment. Ceci revient, dans notre langage, à calculer l'intégrale $\int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\alpha^2 x^2\right)^2 dx$. Il parvient à exploiter les « sommes de Riemann »

[19] Sont facilement accessibles les exposés suivants sur l'histoire de l'Intégration : « Une histoire des mathématiques » par Dahan-Dalmedico et Peiffer, Points-Science, le Seuil, chapitre 5 , ou « Éléments d'Histoire des Mathématiques », par Boubaki, Hermann, Chapitre « Calcul infinitésimal ».

[20] Ce point de vue provient de la théorie atomistique de Démocrite. C'est à ce dernier qu'Archimède attribue les énoncés donnant le volume du cône et celui de la pyramide, mais les démonstrations, spécifie-t-il, sont l'œuvre d'Eudoxe.

[21] Voir par exemple "Mathématiques et mathématiciens", par Dedron et Itard chez Magnard, ou la séquence « la Parabole Carrée ».

grâce à sa connaissance des sommes finies de la puissance $i$ des $n$ premiers entiers $\sum_{k=1}^{n} k^i$ , au moins jusqu'à $i = 4$[22].

## 4. Indivisibles et sommations ( Cavalieri, Roberval, Fermat, Pascal)

Il ne semble pas y avoir eu de transmission des résultats arabes sur le calcul intégral vers l'Europe. Les mathématiciens Européens du XVII^e^ siècle vont être contraints de les retrouver par leurs propres moyens, en partant, eux aussi, de l'œuvre d'Archimède. Ils vont utiliser conjointement les méthodes rigoureuses et apagogiques d'Archimède, et, de façon plus téméraire, les *indivisibles*, encouragés semble-t-il dans cette deuxième voie par une certaine pensée médiévale. Par l'une ou l'autre de ces méthodes, Cavalieri (1598-1647), Torricelli (1608-1647), Roberval (1602-1675), Fermat (1601-1665) réalisent de nombreuses quadratures, en particulier celle de l'aire sous la courbe d'équation $y = x^n$ ($n$ entier naturel), jusqu'à l'abscisse $a$.

Blaise Pascal (1623-1662) utilise sans remords le « langage des indivisibles » de Cavalieri, ainsi que la « sommation » des dits indivisibles. Mais il entrevoit très clairement les concepts que ce langage recouvre, et qui ne seront totalement dégagés qu'au XIX^e^ siècle : ceux de *limite* et de *somme de Riemann*, comme il apparaît dans la citation suivante : « *On n'entend autre chose par somme des ordonnées d'un demi-cercle sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme […] ne diffère de l'espace d'un demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée* »[23]. Le point-de-vue de Pascal reste presque exclusivement géométrique. Pour « sommer » par exemple les sinus de 0 à $\pi$, il considère non pas la courbe représentative de la fonction sinus, dont son époque n'avait pas le concept, mais le demi-cercle, en faisant la somme de petits bouts d'arcs de longueurs égales, multipliés « un chacun » par la distance du petit bout d'arc au diamètre du demi-cercle.

## 5. Le calcul infinitésimal : Leibniz et Newton

La dextérité calculatoire de ces « intégralistes » avant l'heure est frappante. Mais Leibniz (1646-1716) et Newton (1642-1727) vont faire faire à l'histoire de l'intégration des progrès décisifs, organisés autour du théorème fondamental et d'un système de notations qui, tous deux, permettront au calcul intégral d'accéder à la généralité.

Le théorème fondamental est celui de réciprocité entre intégration et dérivation. Newton y accède aisément car il a adopté la conception suivant laquelle toute quantité est fonction d'une variable fondamentale, que l'on peut supposer être le temps. Cette représentation permet alors de définir très intuitivement ce que nous appelons « dérivation » : il s'agit du passage de la fonction x exprimant une quantité en fonction du temps (fonction « fluente ») à la fonction, notée par Newton x, exprimant à l'instant t la vitesse instantanée de variation de x (fonction « fluxion »). Pour Newton, qui n'a pas de notation très spécifique pour l'intégrale, l'intégration n'est autre qu'une dérivation à l'envers.

Souci de généralités et d'abstraction, importance donnée aux notations, telles sont des caractéristiques de la pensée de Leibniz. Prolongeant les idées de

[22] Voir « Histoire des sciences arabes » s.l.d. de Roshi Rashed, Tome 2, Seuil, 1997, p.93 et suivantes, en particulier pages 102-104.

[23] Œuvres complètes de Pascal, la Pléiade, page 232.

Blaise Pascal, il part de considérations discrètes sur les suites, pour construire par analogie son calcul différentiel et intégral. L'équivalent de la fonction dérivée est alors la suite dérivée, celui de la fonction intégrale est la suite des sommes partielles. La première notation de Leibniz pour l'intégrale fut d'abord omn. (omnes = tout), puis rapidement, celle qu'il nous a léguée, S, initiale de Somme, qu'il utilise conjointement au fameux « dx », souvent considéré comme un infiniment petit[24]. Le mot « intégrale » est dû à son disciple Jean Bernoulli (lettre à Leibniz du 12. 2. 1695). Leibniz énonce très vite le théorème fondamental, puisque celui-ci est évident dans le cas discret, et qu'il n'a plus qu'à l'extrapoler audacieusement au cas continu. Parallèlement à son calcul, Leibniz, s'inspirant là encore de Pascal, en donne l'interprétation géométrique, en termes d'aires et de tangentes. Il en recherche également des applications à la géométrie ou à la physique[25].

Les théorèmes pleuvent, sous la plume des deux maîtres, Newton et Leibniz, ou sous celles de leurs épigones.

## 6. Vers la rigueur[26]

Aux XVII^e^ et XIX^e^ siècles, l'Analyse se développe de façon extraordinaire, mais l'on ne se soucie guère avant Cauchy de définir exactement ce dont on parle. Cependant, la réflexion des mathématiciens se portent de nouveau sur l'intégrale, à propos d'un des grands problèmes du XIX^e^ siècle, celui de la série de Fourier déduite d'une fonction.

En effet les coefficients de ces séries sont exprimées par une intégrale mettant en jeu la fonction. Remarquons au passage que si l'on doit la notation $\int$ à Leibniz, et si Euler utilisait la notation $\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x=a \\ x=b \end{bmatrix}$, notre notation $\int_a^b$ est due à Fourier.

Donc, Cauchy essaie de définir l'intégrale sur un segment d'une fonction continue à l'aide des sommes « de Riemann » (1823). Riemann, quant à lui, en 1854, recherche à quelles conditions les sommes qui portent son nom convergent pour un « pas de subdivision » tendant vers zéro. Il aboutit à des conditions nécessaires et suffisantes s'énonçant en termes de faible longueur totale de l'ensemble des intervalles où se produisent des « sauts » de hauteur arbitrairement petite.

Cependant, ni Cauchy ni Riemann ne disposaient du théorème sur la continuité uniforme d'une fonction continue sur un segment. Ils ne pouvaient donc pas démontrer que « toute fonction continue sur [a, b] est intégrable ». Un premier exposé cohérent de l'intégrale, comportant entre autre ce théorème, ne sera présenté que par Darboux, en 1875. Il ne s'agit évidemment que d'une première étape, mais qui clôt notre rapide survol historique.

## 7. Histoire et enseignement de l'Intégrale

Quels peuvent être les apports à l'enseignement de la perspective historique ?

---

24 Source : Collette, « Histoire des mathématiques », chez VUIBERT p 73/74.

25 Notons aussi, parmi tous les travaux de Leibniz, son idée d'une machine à dessiner les fonctions primitives, que l'on pourrait appeler « intégraphe », dans : »La naissance du calcul différentiel » Leibniz (& Marc Parmentier) VRIN

26 Voir Dieudonné, « Abrégé d'histoire des mathématiques », HERMAN pages 256 à 261. Voir aussi : Jean Cavaillès, « Philosophie mathématique », HERMAN, pages 44 à 60.

Le professeur peut d'abord bien sûr exploiter ponctuellement tel ou tel texte historique, d'Archimède, Pascal, Leibniz... les possibilités sont nombreuses, quelques unes ont été évoquées. Mais surtout l'Histoire nous montre toute la valeur de chacun des aspects de l'intégrale qui sont présentés en Terminale :

- **Les aspects géométriques et graphiques** sont en fait à l'origine même du concept de quadrature, et donc de l'intégrale. S'y sont ajoutées au fil du temps les **applications de l'intégration** à la statique (centres de gravité...), à la mécanique, à la Physique, qui furent aussi, historiquement, des motivations des la recherche mathématique.

- Nous avons vu comment, déjà chez Archimède, et de façon plus claire encore chez les Arabes et chez Pascal, le concept de sommes « de Riemann » est au centre même de la théorie historique de l'intégration, qui a trouvé un premier achèvement avec Cauchy, Riemann et Darboux (des théories postérieures, comme celle, capitale, de Lebesgue, ont un point-de-vue différent). Ceci peut être une motivation pour présenter aux élèves des activités qui permettent de les initier aux sommes de Riemann. Un thème lié à celui-ci est le calcul de valeurs approchées de l'intégrale.

- Cependant, la présentation de l'intégrale d'une fonction en classe de Terminale repose sur les fonctions primitives. La découverte du rapport inverse entre dérivation et intégration, à la fin du XVII$^{e}$ siècle, a été tardive, mais décisive dans l'histoire de l'Analyse. Cette présentation amène une grande commodité et clarté de calculs. La principale difficulté théorique qu'elle recèle, et qui fut particulièrement sensible au XIX$^{e}$ siècle, est liée à l'équivalence entre continuité et continuité uniforme d'une fonction sur un intervalle fermé borné de **R**.

En revanche, certains aspects historiques de l'intégration ne trouvent plus guère d'écho dans l'enseignement contemporain. Les indivisibles et leur sommation ont été discrédités, à peu près définitivement (sauf, cependant, en Analyse non standard). Il n'en reste plus trace que dans les notations de Leibniz encore en vigueur « dy/ dx » ou $\int_a^b f(x)\,dx$, qui ont au demeurant leurs vertus. Le parallèle entre sommes discrètes et intégrale d'une fonction continue, qui fut une des sources de l'inspiration de Pascal ou de Leibniz, n'est guère exploité au niveau du Second degré.

L'enseignement secondaire, qui a le souci de la clarté et de la simplicité, ne peut restituer tous les aspects de l'histoire des mathématiques, souvent complexe, voire confuse. Mais ne devons-nous pas être sensible à la longue aventure intellectuelle et humaine qui permit l'émergence des concepts qui sont maintenant le sujet de notre enseignement ? Peut-être aussi devons-nous essayer de faire sentir à nos élèves la richesse de ce passé auquel nous sommes tant redevables.

# Petite bibliographie sur l'histoire de l'Analyse

En ce qui concerne l'histoire de l'analyse, on pourra se référer, en particulier, aux ouvrages suivants, qui, avec quelques autres, ont permis de rédiger ces quelques notices de synthèse.


- Éléments d'histoire des mathématiques – Bourbaki – éd. Hermann
- Une histoire des mathématiques – Dahan-Dalmedico & Peiffer – coll. Points-Science éd. Seuil.
- Mathématiques au fil des âges – J. Dhombres et un groupe de l'IREM – éd. Gauthier-Villars.
- Mathématiques et Mathématiciens – Dedron et Itard – éd. Magnard.
- Histoire des mathématiques – J.P. Collette – éd. Seuil
- Histoire des mathématiques, histoires de problèmes – Commission Inter-IREM – éd. Ellipses.
- Nombre, mesure et continu – J. Dhombres – éd. CEDIC.
- Pour l'honneur de l'esprit humain  J. Dieudonné – éd. Hachette
- Abrégé d'histoire des mathématiques – J. Dieudonné – éd. Hermann
- Preuves et Réfutations – Imre Lakatos – éd. Hermann (deuxième partie).
- et aussi divers articles de l'Encyclopedia universalis.


Quelques adresses sur la toile :

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

http://archives.math.utk.edu/topics/history.html

http://members.aol.com/jeff570/operation.html