

# AUTANT, MOINS OU PLUS ?

## Objectif

Initier les élèves, sur des exemples, au concept d'équipotence entre des ensembles.

Démontrer que des ensembles très différents (du point de vue topologique par exemple) peuvent cependant être équipotents.

## Outils

Définition de la bijection.

Connaissances sur les fonctions.



Les mathématiciens introduisent généralement le concept de « nombre d'éléments » d'un ensemble de la façon suivante : deux ensembles  $E$  et  $F$  ont le même nombre d'éléments s'il existe une bijection de  $E$  sur  $F$ .

En mettant en œuvre cette définition sur des exemples, divers mathématiciens furent fort surpris du fait que des ensembles très dissemblables puissent être mis en bijection l'un avec l'autre, et donc avoir le même « nombre d'éléments ».

On se propose d'étudier certains de ces exemples.



## A. ENSEMBLES FINIS

« Je sais compter le nombre de doigts de ma main parce que je sais attribuer à chaque doigt un numéro et un seul. Par exemple pouce  $\mapsto 1$ , index  $\mapsto 2$ , majeur  $\mapsto 3$ , annulaire  $\mapsto 4$ , auriculaire  $\mapsto 5$ .

Ce n'est pas la seule façon possible (index  $\mapsto 1$ , annulaire  $\mapsto 2$ , ...) mais il ne fait aucun doute (?) que le dernier doigt recevra le numéro 5. Je dis que ma main a cinq doigts. »

En langage savant on dit que l'on a créé une bijection de l'ensemble des doigts vers l'ensemble  $\{1; 2; 3; 4; 5\}$  et que cette bijection n'est pas unique.

D'une manière générale, si on sait construire une bijection d'un ensemble  $E$  sur l'ensemble  $\{1; 2; \dots; n\}$ , on dit que  $E$  est un ensemble fini de  $n$  éléments. La bijection n'est pas unique, mais on concevra que  $n$  est unique.  $n$  s'appelle le cardinal de  $E$ .

On dit que deux ensembles de même cardinal ont « autant » d'éléments.

L'ensemble vide n'a pas d'éléments. On dit qu'il a zéro élément ou que son cardinal est 0.

Si  $E$  est un ensemble fini et si  $F$  est strictement inclus dans  $E$ , on dit que  $F$  a « moins » d'éléments que  $E$  ou encore que  $E$  a « plus » d'éléments que  $F$ .

Mais, dès qu'il s'agit d'ensembles infinis (c'est-à-dire qui ne sont pas finis) les mots « autant », « plus », « moins » deviennent trompeurs...

## B. ENSEMBLES EN BIJECTION AVEC L'ENSEMBLE $\mathbb{N}$ DES ENTIERS NATURELS

### Exemple 1

Soit  $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$  et  $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$ . Il y a manifestement « plus » d'éléments dans  $\mathbb{N}$  que dans  $\mathbb{N}^*$ , puisqu'on passe de  $\mathbb{N}$  à  $\mathbb{N}^*$  en enlevant zéro.

Démontrer cependant qu'il existe une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathbb{N}^*$  (préciser la bijection utilisée) et donc que  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^*$  ont « le même nombre d'éléments »...

Il y a « autant » d'éléments dans  $\mathbb{N}$  que dans  $\mathbb{N}^*$ ...

### Exemple 2

Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des entiers naturels pairs.

La réaction naturelle est de dire qu'il y a deux fois plus d'éléments dans  $\mathbb{N}$  que dans  $\mathcal{P}$ .

Démontrer cependant qu'il existe une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathcal{P}$ . Conclusion ?

De même, soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble des entiers naturels impairs.

La réaction naturelle est de dire qu'il y a autant d'entiers pairs que d'entiers impairs et qu'il y a deux fois plus d'éléments dans  $\mathcal{I}$  que dans  $\mathbb{N}$ .

Démontrer cependant qu'il existe une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathcal{I}$ . Conclusion ?

### Exemple 3

Cet exemple est dû à l'illustre physicien et mathématicien Galileo Galilei, et figure dans le « Discours concernant deux sciences nouvelles », paru en 1638<sup>1</sup>.

Galilée considère l'ensemble, que nous noterons  $C$ , des carrés de tous les entiers naturels non nuls, appelés par lui « nombres carrés ».  $C = \{n^2, n \in \mathbb{N}^*\}$ . Cet ensemble donne lieu aux réflexions suivantes de Salviati, l'un des personnages du livre de Galilée.

*« Si je demande combien il y a de nombres carrés, on peut répondre, sans se tromper, qu'il y en a autant que de racines [carrées] correspondantes, attendu que tout carré a sa racine et toute racine son carré, qu'un carré n'a pas plus d'une racine, et une racine pas plus d'un carré[...] ; cela étant, il faudra donc dire qu'il y a autant de nombres carrés qu'il y a de nombres, puisqu'il y a autant de racines, et que les racines représentent l'ensemble des nombres ; et pourtant [...] il y a beaucoup plus de nombres que de carrés, étant donné que la plus grande partie des nombres ne sont pas des carrés. A quoi s'ajoute le fait que la proportion des carrés diminue toujours davantage quand on passe à des nombres plus élevés [...]. ».*

1. Démontrer, en suivant l'argumentation de Galilée, que  $\mathbb{N}^*$  et  $C$  peuvent être mis en bijection l'un avec l'autre. Il y a donc « autant » d'éléments dans  $C$  que dans  $\mathbb{N}^*$ .

2. Pour tout entier naturel non nul  $k$ , on note  $c(k)$  le nombre d'éléments de  $C$  inférieurs ou égaux à  $k$ , et on note  $p(k)$  la proportion des carrés parmi les entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à  $k$ ,

c'est-à-dire :  $p(k) = \frac{c(k)}{k}$ .

a. Calculer  $p(99)$ ,  $p(100)$ ,  $p(10\,000)$ .

b. Majorer  $c(k)$ .

En déduire que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} p(k) = 0$ . Autrement dit, la proportion des carrés parmi les entiers naturels inférieurs ou égaux à  $k$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$ . Ceci semble montrer qu'il y a « beaucoup plus » de nombres naturels que de carrés.

<sup>1</sup> Éditions PUF - Collection Épiméthée - Traduction de M. Clavelin - pages 30 et 31.

### Conclusion

Dans le cas d'un ensemble infini  $E$ , une partie  $P$  de  $E$ , différente de  $E$ , peut avoir « autant d'éléments que  $E$ , au sens qu'il existe une bijection entre  $P$  et  $E$  ».

## C. ENSEMBLES EN BIJECTION AVEC DES INTERVALLES DE $\mathbb{R}$

### Exemple 1. La longueur d'un segment ne permet pas de conclure sur le « nombre d'éléments »

Autre problème qui troubla beaucoup les mathématiciens du passé : il semble qu'il y ait « plus » de points dans un grand segment que dans un petit.

1. Dessiner dans le plan deux segments à supports parallèles, l'un ayant une longueur double de l'autre. Définir géométriquement une bijection du plus petit segment vers le plus grand. En déduire que les deux ensembles ont le « même » nombre d'éléments.
2. Soit deux segments quelconques. Envisager les différents cas de figures possibles et trouver pour chacun d'eux une bijection du premier segment sur le deuxième.
3. Définir une bijection de l'intervalle fermé  $[-1 ; 1]$  sur l'intervalle fermé  $[-2 ; 2]$ .

Conclusion : il n'y a pas plus de points dans un « grand » segment que dans un « petit », même si le grand contient le petit.

### Exemple 2. Existence de bijections entre ensembles bornés et non bornés

1. Démontrer que  $] -1 ; 1 [$  et  $] -\infty ; +\infty [$  ont le même nombre d'éléments.

#### INDICATION

Trouver une bijection entre ces deux ensembles, par exemple une fonction rationnelle  $f$  admettant  $-\infty$  comme limite en  $-1$ ,  $+\infty$  comme limite en  $1$ , strictement croissante sur  $] -1 ; 1 [$ . Faire par exemple en sorte que  $f$  soit impaire. Tracer la courbe représentative dans un repère de cette bijection  $f$ .

2. a. Soit  $D$  un demi-cercle de rayon 1 privé de ses points limites  $A$  et  $B$ . Soit  $O$  le milieu de  $[AB]$ . Soit  $\Delta$  la droite parallèle à  $(AB)$  et tangente au demi-cercle ; soit  $I$  leur point de contact.

Définir géométriquement une bijection  $F$  de  $D$  dans  $\Delta$ .

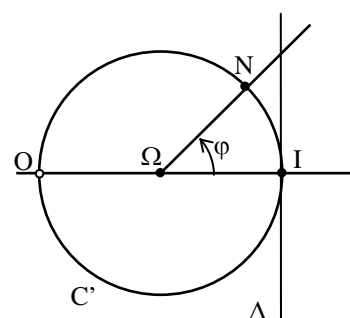
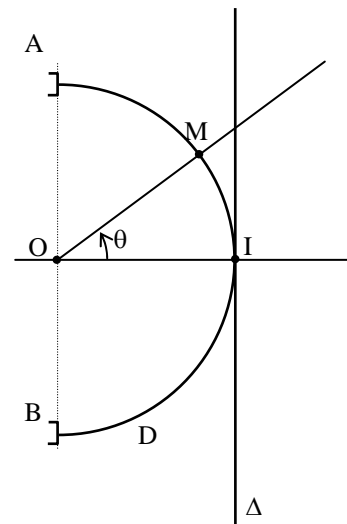
Pour tout point  $M$  de  $D$ , on note  $\theta$  la mesure de l'angle  $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$  appartenant à  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ . Soit  $M' = F(M)$  et  $y$  la mesure algébrique  $\overline{IM'}$ .

Exprimer  $y$  en fonction de  $\theta$ .

En déduire une bijection  $f$  de  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$  sur  $] -\infty ; +\infty [$ .

- b. Soit  $C$  un cercle de diamètre  $[OI]$ , avec  $OI = 1$ , et  $\Omega$  le centre de  $C$ . On note  $C'$  l'ensemble  $C \setminus \{O\}$ , et  $\Delta$  la droite tangente à  $C$  en  $I$ .

Définir géométriquement une bijection  $G$  de  $C'$  sur  $\Delta$ .



Pour tout point  $N$  de  $C'$ , on note  $\varphi$  la mesure de l'angle  $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega N})$  appartenant à  $] -\pi ; \pi [$ .

Soit  $N' = G(N)$  et  $y$  la mesure algébrique  $\overline{IN'}$ .

Exprimer  $y$  en fonction de  $\varphi$ .

En déduire une bijection  $g$  de  $] -\pi ; \pi [$  sur  $] -\infty ; +\infty [$ .

Conclusion des deux exemples précédents : des ensembles bornés peuvent avoir le même nombre d'éléments que des ensembles non-bornés.

c. On considère la figure obtenue par réunion de celles définies dans les questions précédentes (voir dessin ci-contre). Les applications  $F$  et  $G$  ont été définies dans ces mêmes questions.

Expliquer à quelle construction géométrique correspond la bijection  $F^{-1} \circ G$ , de  $C'$  dans  $D$ .

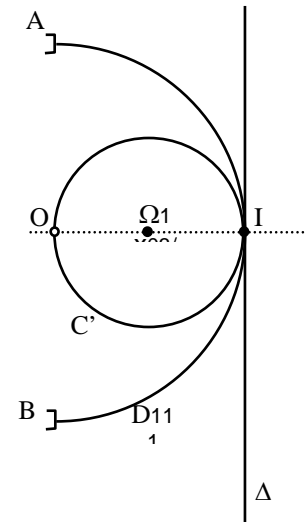
On note  $H$  cette bijection. Soit  $N$  un point quelconque de  $C'$ , on note  $M = H(N)$ .  $\theta$  et  $\varphi$  sont définies comme dans les questions précédentes.

Exprimer  $\theta$  en fonction de  $\varphi$ .

En déduire la bijection correspondante  $h$  de  $] -\pi ; \pi [$  sur  $] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} [$ .

$a$  et  $b$  étant deux réels tels que  $a < b$ , déterminer la fonction affine  $u$  telle que  $u(a) = -\pi$  et  $u(b) = \pi$ .

En déduire que tout intervalle  $] a ; b [$  peut être mis en bijection avec  $\mathbb{R}$ .



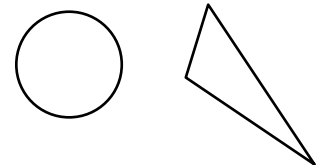
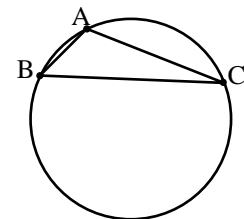
3. Soit un triangle  $ABC$  et son cercle circonscrit.

Démontrer qu'il existe autant de points sur l'un quelconque des côtés que sur l'arc correspondant à ce côté (intersection du cercle et du demi-plan limité par le côté et ne contenant pas le troisième sommet).

Inventer une bijection entre le cercle et le triangle représentés ci-contre.

AIDE

Utiliser par exemple des transformations géométriques classiques et le cercle circonscrit au triangle.



### Exemple 3. Existence de bijections entre intervalles ouverts et intervalles fermés ou semi-fermés

On pose  $D = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots \right\}$  et  $D' = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots \right\}$

1. Construire une bijection,  $g$ , de  $D'$  sur  $D$ .

Construire une bijection,  $f$ , de  $]0; 1[$  sur  $]0; 1[$ , dont la restriction à  $D'$  soit  $g$  (c'est-à-dire telle que, pour tout  $x$  de  $D'$ ,  $f(x) = g(x)$ ).

$]0; 1[$  a donc autant d'éléments que  $]0; 1[$  !

2. Grâce à la fonction  $f$  ci-dessus, définir une bijection de  $] -1; 0 ]$  sur  $] -1; 0 ]$ .

En déduire une bijection de  $] -1; 1 [$  sur  $] -1; 1 [$ .

$] -1; 1 [$  a donc autant d'éléments que  $] -1; 1 [$  !

#### Conclusion

Les ensembles  $]0; 1[$  et  $]0; 1[$ , bien que dissemblables, peuvent être mis en bijection. Il est encore plus surprenant qu'il existe une bijection entre les intervalles  $] -1; 1 [$  et  $] -1; 1 ]$ , l'un ouvert, l'autre fermé.

On peut cependant montrer qu'il n'existe pas de bijection continue entre  $]0; 1[$  et  $]0; 1]$ , ou entre  $] -1; 1 [$  et  $] -1; 1 ]$ . Ces ensembles sont donc bien d'espèces différentes, mais pas du point de vue du « nombre d'éléments ».

3. Plus généralement on peut mettre en bijection tout intervalle  $] a; b [$  avec les intervalles  $[ a; b ]$ ,  $[ a; b [$ ,  $] a; b ]$ .

Par exemple, on peut déterminer une fonction affine  $u$  telle que  $u \circ g \circ u^{-1}([ a; b ]) = [ a; b ]$  où  $g$  est la fonction utilisée ci-dessus.

#### Variante

Voici une application  $f$  de  $]0; 1[$  sur  $]0; 1[$ :

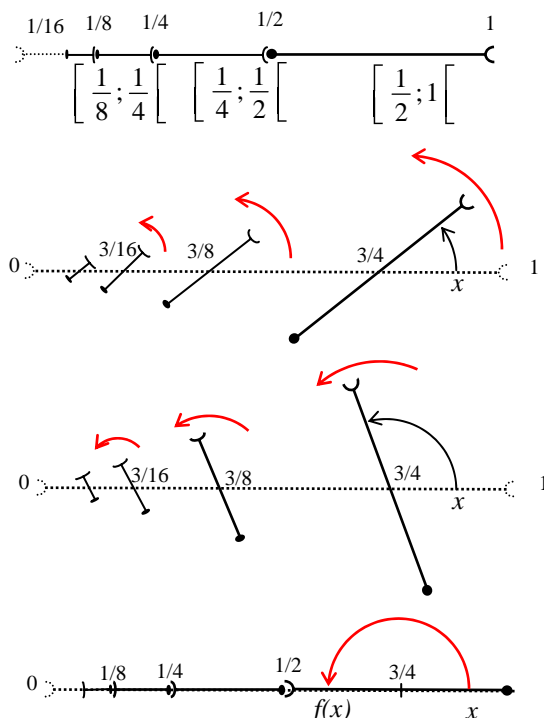
① On décompose  $]0; 1[$  en intervalles semi-ouverts à droite de la forme  $\left[ \frac{1}{2^{n+1}}; \frac{1}{2^n} \right[$ ,  $n$  étant un entier naturel.

② On fait « tourner » chacun des intervalles  $\left[ \frac{1}{2^{n+1}}; \frac{1}{2^n} \right[$  autour de son centre

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{3}{2^{n+2}}.$$

Chaque réel  $x$  de  $]0; 1[$  acquiert ainsi une nouvelle position  $f(x)$ , ce qui définit une application de  $]0; 1[$  dans  $]0; 1[$ .

1. Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0; 1[$  dans  $]0; 1[$ .



#### INDICATION

Soit  $D = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

On pourra montrer séparément que tout élément de  $]0; 1[ \setminus D$  a un antécédent unique par  $f$ , puis qu'il en va de même pour tout élément de  $D$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x$  de l'intervalle  $\left[ \frac{1}{2^{n+1}}; \frac{1}{2^n} \right]$ , exprimer  $f(x)$  en fonction de  $x$  et de  $n$ .
- Tracer la courbe représentative de  $f$  sur  $]0; 1[$  (le tracé sera forcément imprécis pour les abscisses proches de zéro).  
Constater sur le graphique que  $f$  est une bijection de  $]0; 1[$  dans  $]0; 1[$ .
- À partir de la fonction  $f$  définie précédemment, on définit une fonction  $g$  sur  $]-1; 1[$  par :  
si  $x \in ]0; 1[$  alors  $g(x) = f(x)$  ;  
si  $x = 0$  alors  $g(x) = 0$   
si  $x \in ]-1; 0[$  alors  $g(x) = -f(-x)$ .  
Démontrer que  $g$  est une bijection de  $]-1; 1[$  sur  $]-1; 1[$   
Tracer la courbe représentative de  $g$  (on pourra d'abord démontrer que  $g$  est impaire).

### Autres exemples

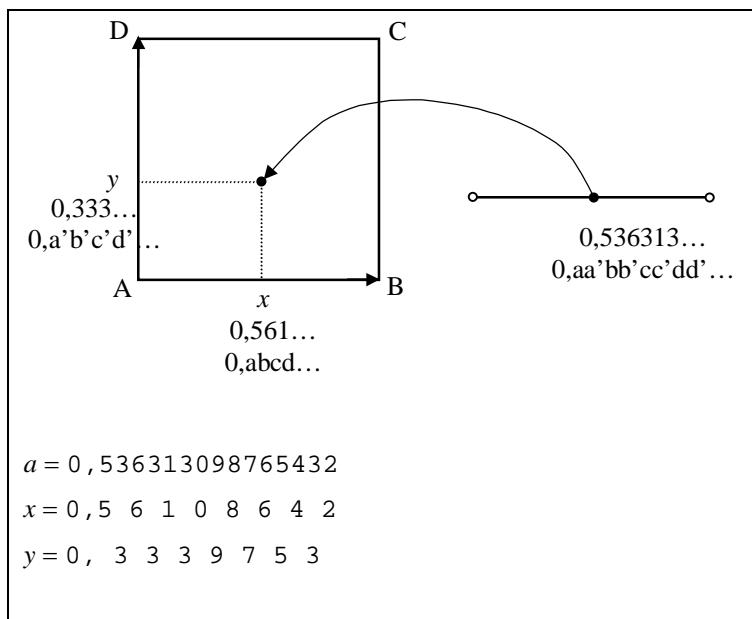
- Il y a autant de points sur un segment ouvert de longueur 1 qu'à l'intérieur d'un carré ouvert de côté 1.

Chaque point du segment ouvert est associé à un nombre et un seul de  $]0; 1[$ .

Chaque nombre de cet intervalle possède un développement décimal illimité, unique, non terminé par une suite infinie de 9 (on complète éventuellement par des 0).

Chaque point du carré est associé à un couple et un seul de  $]0; 1[ \times ]0; 1[$ .

À partir d'un nombre  $a$  de  $]0; 1[$ , on crée un couple  $(x; y)$  de  $]0; 1[ \times ]0; 1[$  de la façon suivante : la décimale de rang  $p$  de  $x$  est la décimale de rang  $2p-1$  de  $a$  et la décimale de rang  $p$  de  $y$  est la décimale de rang  $2p$  de  $a$  (voir exemple dans le cadre ci-contre).



Par ce procédé on met en bijection le carré ouvert avec le segment ouvert.

Montrer de même qu'il y a « autant » de points sur un segment ouvert de longueur 1 qu'à l'intérieur d'un cube ouvert de côté 1.

- Il y a « autant » d'éléments dans  $\mathbb{R}$  que dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

D'après ce qui précède, il existe une bijection  $u$  de  $]0; 1[$  sur  $\mathbb{R}$ .

Vérifier que l'application  $v : (x; y) \mapsto (u(x); u(y))$  est une bijection.

Montrer alors qu'il existe une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Y a-t-il « autant », « moins » ou « plus » de nombres complexes que de nombres réels ?

3.  $O$  étant un point du plan, démontrer que l'ensemble des rotations planes de centre  $O$  est en bijection avec l'ensemble  $\mathcal{R}$  des réflexions planes d'axe passant par  $O$

**Méthode**

Prendre une droite  $D_0$  passant par  $O$  et étudier l'application qui associe à toute réflexion  $s$  la composée  $s \circ s_0$ , où  $s_0$  désigne la réflexion d'axe  $D_0$ .

Ces ensembles sont-ils dénombrables ?

4. Pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{N}$ , on note  $\chi_A$  l'application de  $\mathbb{N}$  vers  $\{0; 1\}$  définie par  $\chi_A(x) = 1$  si  $x \in A$  et  $\chi_A(x) = 0$  si  $x \notin A$ .

On note  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  l'ensemble des parties de  $\mathbb{N}$  et  $\mathcal{Q}(\mathbb{N}; \{0; 1\})$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{N}$  vers  $\{0; 1\}$ .

- a. En étudiant l'application qui à, à tout élément  $A$  de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , associe l'élément  $\chi_A$  de  $\mathcal{Q}(\mathbb{N}; \{0; 1\})$ , démontrer que  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  et  $\mathcal{Q}(\mathbb{N}; \{0; 1\})$  sont en bijection.
- b. Démontrer que l'ensemble  $\mathcal{Q}(\mathbb{N}; \{0; 1\})$  est équipotent à  $\mathbb{N}$ .

**AIDE**

Toute application  $\chi_A$  peut être codée à l'aide d'une suite infinie de 0 et de 1,  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , donc à l'aide d'un nombre de la forme  $0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots$  qui peut être considéré comme l'écriture binaire d'un nombre de l'intervalle  $]0; 1[$ .

