DE L'INFINI AU FINI

Définitions

1. Deux ensembles équipotents sont des ensembles pour lesquels il existe au moins une bijection de l'un sur l'autre.

2. Un ensemble infini est un ensemble équipotent à au moins une de ses parties strictes.

   (On dit qu'un ensemble A est une partie stricte d'un ensemble E lorsque A est inclus dans E et que A est différent de E).

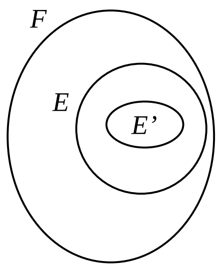
   Un ensemble fini est un ensemble qui n'est pas infini.

3. Un ensemble dénombrable est un ensemble équipotent à $\mathbb{N}$.

Propriétés

1. L'ensemble vide est fini.

En effet, l'ensemble vide n'a pas de partie stricte.



2. Tout ensemble contenant un ensemble infini est infini.

Soit F un ensemble contenant un ensemble infini E.
Par définition il existe une partie stricte de E, notée E', et une bijection f de E sur E'.
Soit F' l'ensemble des éléments de F qui n'appartiennent pas à E.
Montrer que $E' \cup F'$ est une partie stricte de F.
Soit g l'application de F dans $E' \cup F'$ définie par :
si $x \in E$, $g(x) = f(x)$
si $x \in F - E$, $g(x) = x$.
Montrer que g est une bijection de F sur $E' \cup F'$.
Conclure.

3. n étant un entier naturel non nul, l'ensemble $I_n = \{ 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n \}$ est fini.

On utilise un raisonnement par récurrence.

a. Quelles sont les parties strictes de I_1 ?
En déduire qu'il n'existe aucune bijection de I_1 sur une de ses parties strictes.

b. On suppose qu'il existe une bijection, f, de I_{n+1} sur une de ses parties strictes, A, ne contenant pas $n + 1$; soit $r = f(n + 1)$.
Montrer que la restriction de f à I_n est une bijection de I_n sur sa partie stricte $A' = A - \{ r \}$.

c. On suppose qu'il existe une bijection f de I_{n+1} sur une de ses parties strictes B contenant $n + 1$. On pose $p = f(n + 1)$ et $q = f^{-1}(n + 1)$. On appelle σ l'échange de p et q.
Montrer que $f \circ \sigma \circ f$ est une bijection de I_{n+1} dans B qui laisse $n + 1$ invariant.
En déduire que la restriction de $f \circ \sigma \circ f$ à I_n est une bijection de I_n sur sa partie stricte $B' = B - \{ n + 1 \}$.

d. Mettre la récurrence en forme et conclure.

4. Si I_n et $I_{n'}$ sont équipotents, alors $n = n'$.

On suppose $n' < n$.
$I_{n'}$ est alors une partie stricte de I_n. Il en résulte que I_n est infini, ce qui contredit la propriété 3.
Par conséquent $n' \geq n$.
On montrerait de même que $n \geq n'$. Par suite $n = n'$.

5. Un ensemble équipotent à un ensemble infini est infini.

Soit E un ensemble infini et F un ensemble équipotent à E.
D'après les définitions précédentes, il existe une bijection f de E sur F et une bijection g de E sur une partie stricte E' de E.

a. Montrer que $F' = f(E')$ est une partie stricte de F.

b. Montrer que $f \circ g \circ f^{-1}$ est une bijection de F sur F'.

c. Conclure.

6. Tout ensemble équipotent à I_n est fini.

On fait un raisonnement par l'absurde en utilisant les propriétés 3 et 5.

7. Pour tout ensemble fini non vide E, il existe un unique entier naturel n tel que E soit équipotent à l'intervalle I_n de $\mathbb{N}$. Cet entier n s'appelle le cardinal de E , noté $\text{card } E$; par convention $\text{card } \varnothing = 0$.

Soit E un ensemble fini non vide et $x_1 \in E$.

Si $E = \{ x_1 \}$, alors l'application f_1 de I_1 dans E telle que $f_1(1) = x_1$ est une bijection.
Si $E \neq \{ x_1 \}$, alors il existe $x_2 \in E$ tel que $x_2 \neq x_1$.

Si $E = \{ x_1 ; x_2 \}$, alors l'application f_2 de I_2 dans E telle que, pour tout élément i de $\{ 1 ; 2 \}$, $f_2(i) = x_i$, est une bijection.
Si $E \neq \{ x_1 ; x_2 \}$, alors il existe $x_3 \in E$ tel que … etc.

S'il n'existe aucun n tel que $E = \{ x_1 ; x_2 ; ... ; x_n \}$, on construit, à l'aide du procédé ci-dessus, une bijection de $\mathbb{N}$ sur une partie E' de E. Cette partie E' est infinie ce qui contredit l'hypothèse « E est un ensemble fini ».
Il existe donc une entier naturel n tel que E soit équipotent à I_n et, d'après la proposition 4, cet entier est unique.

8. Toute partie stricte F d'un ensemble fini E est finie et $\text{card } F < \text{card } E$.

D'après la proposition 2, F ne peut pas être infini.
On pose $n = \text{card } F$.
Montrer que les éléments de F peuvent être notés $x_1, x_2, ..., x_n$ et en déduire que
$E = \{ x_1 ; x_2 ; ... ; x_n ; x_{n+1} ; ... ; x_{n+p} \}$ avec $p \neq 0$. Montrer alors que $\text{card } F < \text{card } E$.

9. Un ensemble E est dénombrable si et seulement si on peut ranger ses éléments en une suite définie sur $\mathbb{N}$.

En effet, si E est dénombrable, il existe une bijection f de E sur $\mathbb{N}$.

La bijection réciproque de f, notée f^{-1}, est une bijection de $\mathbb{N}$ sur E et les éléments de E se rangent dans la suite $(f^{-1}(n)) = (u_n)$.

Réciproquement, si les éléments de E ont pu être rangés en une suite définie sur $\mathbb{N}$, l'application qui, à tout élément de E, fait correspondre son rang dans la suite (u_n) est une bijection de E sur $\mathbb{N}$. Par suite E est dénombrable.