DÉNOMBRABLE OU CONTINU ?

Objectif	*Déterminer, pour divers ensembles simples, s'ils sont dénombrables ou continus. Démontrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas équipotents.*
Outils	*Réciproque d'une bijection. Bijection composée de deux bijections.*

Le propos de cette séquence est d'examiner, pour divers ensembles, s'ils sont dénombrables ou s'ils ont la puissance du continu. Les résultats sont parfois surprenants

Les mathématiciens, suivant les idées de Georg Cantor (1845-1918), distinguent plusieurs sortes d'ensembles infinis. Ils ont adopté les définitions suivantes :

Définitions :

1. Un ensemble E est dit « dénombrable » s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.
2. Un ensemble E a « la puissance du continu » s'il existe une bijection de $\mathbb{R}$ sur E.
3. Un ensemble A est équipotent à un ensemble B lorsqu'il existe au moins une bijection de A sur B.

Un ensemble est donc dénombrable si et seulement si il est équipotent à $\mathbb{N}$; un ensemble a la puissance du continu si et seulement si il est équipotent à $\mathbb{R}$.

Résultats préliminaires

Soit A, B et C trois ensembles.

Démontrer que :

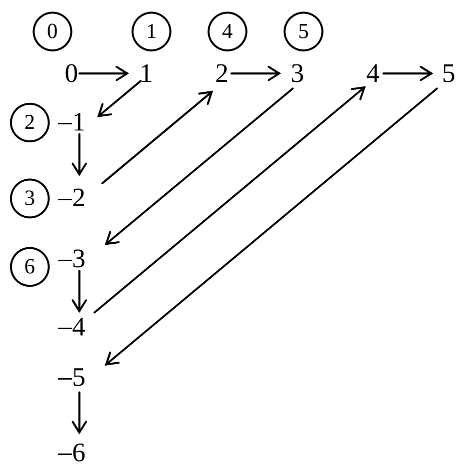
1. Si A est équipotent à B, alors B est équipotent à A.
2. Si A est équipotent à B et B est équipotent à C, alors A est équipotent à C.

A. Ensembles dénombrables

1. $\mathbb{Z}$ est dénombrable

Il existe au moins une bijection, f, de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$. Pour présenter une telle bijection, le plus simple est de faire un schéma (voir ci-contre).

n	0	1	2	3	4	5	6	
$f(n)$	0	1	–1	2	–2	3	–3	



a. Définir explicitement $f(n)$ en fonction de n, pour tout entier naturel n (on pourra distinguer les cas n pair et n impair).

b. Démontrer que f est bien une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

c. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f. Définir explicitement $f^{-1}(m)$ en fonction de m, pour tout entier relatif m (on pourra distinguer les cas m positif et m négatif).

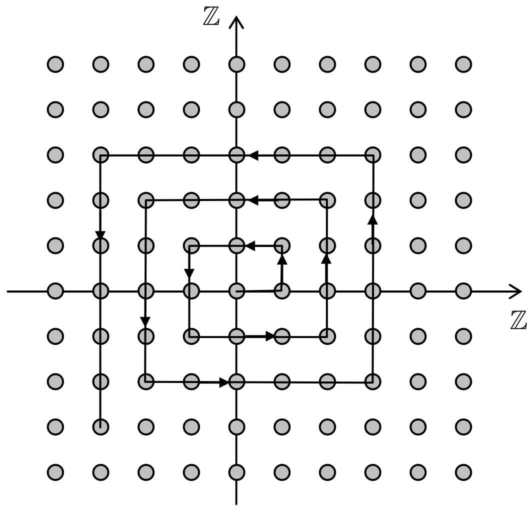
On peut donc dire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

2. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est dénombrable

On définit l'application f de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ par :

« pour tout couple $(m\,;\,n)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(m\,;\,n) = 2\,(|m| + |n|)^2 + S\,(n).(|m| + |n| - m)$ où l'on a posé $S\,(n) = +1$ si n est positif ou nul et $S\,(n) = -1$ si n est strictement négatif »

Sur la figure ci-contre, à côté de chacun des points à coordonnées entières $(m\,;\,n)$ (les plus proches de l'origine, écrire $f(m\,;\,n)$. Relier chaque point numéroté p au point numéroté $(p + 1)$. Quelle semble être la forme de cette « trajectoire » ? Semble-t-elle passer par tous les points à coordonnées entières ?



On peut démontrer que f est une bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$ et ainsi que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est dénombrable :

Pour tout q élément de $\mathbb{N}$, on note C_q l'ensemble des couples $(m\,;\,n)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $|m| + |n| = q$. Alors tout élément $(m\,;\,n)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ appartient à un unique ensemble C_q (avec $q = |m| + |n|$).

a. Colorier avec des couleurs différentes, sur la figure ci-contre, C_0, C_1, C_2, C_3, C_4.

b. Pour tout entier naturel q, on pose : $a_q = 2\,q^2 - 2\,q + 1$, et on note I_q l'intervalle $[a_q\,;\,a_{q+1} - 1]$. Démontrer que pour tout q de $\mathbb{N}$, $f(Cq) \subset I_q$

c. Soit q un entier naturel. Démontrer que, si deux couples $(m\,;\,n)$ et $(m'\,;\,n')$ de C ont même image par f, alors ils sont égaux (on pourra exprimer $f(m\,;\,n)$ et $f(m'\,;\,n')$ en fonction de q, m et n). On en déduit que tout élément de I_q a au plus un antécédent par f dans C_q.

d. Déterminer le nombre d'éléments de C_q et montrer qu'il est égal à celui de I_q. Déduire de ce résultat et de la question précédente que f est bijective de C_q sur I_q.

e. Vérifier que la suite (a_q) est strictement croissante et tend vers $+\infty$. On en déuit que tout entier naturel appartient à un unique intervalle I_q. En déduire que f est bijective de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$. Conclure.

3. $\mathbb{Q}$ est dénombrable

Voici comment on peut démontrer ce résultat.

Remarquons tout d'abord que tout nombre rationnel peut être représenté par un infinité de couples de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Par exemple $\frac{3}{4}$ peut être représenté par $(\,3\,;\,4\,)$, $(\,-3\,;\,-4\,)$, $(\,6\,;\,8\,)$, $(\,-6\,;\,-8\,)$, etc.

Un couple de la forme $(\,n\,;\,0\,)$ ne représente pas de nombre rationnel.

On peut créer une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$ de la façon suivante : on suit le parcours défini pour $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans le schéma précédent en numérotant les points rencontrés, mais en sautant les points qui ne représentent pas de rationnel ou qui représentent un rationnel déjà numéroté.

a. Sur un schéma semblable à celui ci-dessus, numéroter, en suivant la méthode ci-dessus, les points de coordonnées entières portant les numéros de 0 à 15, en barrant au fur et à mesure les points qu'il faudra exclure de la numérotation.

b. Faire la liste ordonnée des nombres rationnels auxquels sont associés par ce procédé les entiers naturels de 0 à 15.

B.] 0 ; 1[n'est pas dénombrable

On admet que tout nombre réel de $]\,0\,;1\,[$ possède un unique développement décimal illimité, de la forme 0,..., éventuellement terminé par une suite illimitée de 0, mais non terminé par une suite illimitée de 9, et non constitué exclusivement de zéros.

On dira d'une telle écriture décimale illimitée qu'elle est « standard ».

Exemples :			
	$\frac{1}{2} = 0,5000000.....$ $\sqrt{0,6} = 0,7745966692.....$	$\frac{1}{3} = 0,3333333......$ $\frac{1}{\pi} = 0,3183099886.....$	$\frac{1}{4} = 0,2500000....$

Inversement, on démontre que tout développement décimal illimité standard correspond à un et un seul nombre de $]\,0\,;1\,[$.

Pour montrer que $]\,0\,;1\,[$ n'est pas dénombrable, on raisonne par l'absurde. On suppose que $]\,0\,;1\,[$ est dénombrable. Alors $]\,0\,;1\,[$ est équipotent à $\mathbb{N}$. Or $\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}^*$. Donc $]\,0\,;1\,[$ est équipotent à $\mathbb{N}^*$. Il existe alors une bijection f de $\mathbb{N}^*$ sur $]\,0\,;1\,[$.

$1 \mapsto$ 0,$\boxed{5}$36000000000000…
$2 \mapsto$ 0,0$\boxed{0}$0336789145328…
$3 \mapsto$ 0,12$\boxed{9}$456789123123…
$4 \mapsto$ 0,122$\boxed{3}$33444455555…
… … … …

On peut alors ranger les nombres de cet intervalle dans un tableau illimité vers la droite et vers le bas (voir ci-contre).

On construit alors un nombre de la façon suivante : le n-ième chiffre après la virgule de ce nombre est le n-ième chiffre après la virgule du n-ième nombre du tableau, augmenté de 1 (2 pour 1, 3 pour 2, … , 0 pour 9).

Dans le cas ci-contre ce nombre serait 0,6104…

Or, de part sa définition, ce nombre ne peut pas figurer dans la liste. En effet, s'il était sur la n-ième ligne, son n-ième chiffre après la virgule devrait être à la fois a et $a + 1$.

Il n'existe donc pas de bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $]\,0\,;1\,[$ et, par suite, de $\mathbb{N}$ sur $]\,0\,;1\,[$.

$]\,0\,;1\,[$ n'est pas dénombrable.

C. Ensembles ayant la puissance du continu

L'intervalle] –1 ; 1 [a la puissance du continu

Pour démontrer ce résultat, il suffit de construire une bijection de $]\,-1\,;1\,[$ sur $\mathbb{R}$. On peut, par exemple, trouver une fonction rationnelle, impaire, qui soit une bijection de $]\,-1\,;1\,[$ sur $\mathbb{R}$.

Tout intervalle ouvert et borné de ℝ a la puissance du continu

Démontrer que tout intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ est équipotent à $]\,-1\,;1\,[$, puis conclure.

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

a. À l'aide des résultats antérieurs, démontrer par l'absurde que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

b En déduire qu'un ensemble ayant la puissance du continu n'est pas dénombrable

> « L'infini dénombrable » et « la puissance du continu » sont donc bien des infinis différents. On peut d'ailleurs montrer qu'il existe encore d'autres sortes d'infinis... de tels concepts sont quelque peu vertigineux.

D. D'autres ensembles ayant la puissance du continu

1. [0 ; 1 [et [0 ; 1][1]

On pose $D = \left\{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; ...\right\}$ et $D' = \left\{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{\frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{8} ; ...\right\}$

a. Construire une bijection, g, de D' sur D.

Construire une bijection, f, de $[\,0 ; 1\,[$ sur $[\,0 ; 1\,]$, dont la restriction à D' soit g (c'est-à-dire telle que, pour tout x de D', $f(x) = g(x)$).

$[\,0 ; 1\,[$ a donc autant d'éléments que $[\,0 ; 1\,]$![2]

b. Grâce à la fonction f ci-dessus, définir une bijection de $]\,–1 ; 0\,]$ sur $[\,–1 ; 0\,]$.

En déduire une bijection de $]\,–1 ; 1\,[$ sur $[\,–1 ; 1\,]$.

$]\,–1 ; 1\,[$ a donc autant d'éléments que $[\,–1 ; 1\,]$!

> Conclusion
> Les ensembles $]\,0 ; 1\,[$ et $[\,0 ; 1\,[$, bien que dissemblables, peuvent être mis en bijection. Il est encore plus surprenant qu'il existe une bijection entre les intervalles $]\,–1 ; 1\,[$ et $[\,–1 ; 1\,]$, l'un ouvert, l'autre fermé.
>
> On peut cependant montrer qu'il n'existe pas de bijection continue entre $]\,0 ; 1\,[$ et $]\,0 ; 1\,]$, ou entre $]\,–1 ; 1\,[$ et $[\,–1 ; 1\,]$. Ces ensembles sont donc bien d'espèces différentes, mais pas du point de vue du « nombre d'éléments ».

c. Plus généralement on peut mettre en bijection tout intervalle $]\,a ; b\,[$ avec les intervalles $[\,a ; b\,]$, $[\,a ; b\,[$, $]\,a ; b\,]$.

Par exemple, on peut déterminer une fonction affine u telle que $u \circ g \circ u^{-1}(\,]\,a ; b\,[\,) = [\,a ; b\,]$ où g est la fonction utilisée ci-dessus.

2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

Pour tout entier naturel n, on définit les ensembles E_n et E'_n suivants :

$$E_n = \left\{k + \frac{1}{n+1},\ k \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1 + \frac{1}{n+1} ; 2 + \frac{1}{n+1} ; 3 + \frac{1}{n+1} ; ...\right\}$$

$$E'_n = E_n \cup \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$$

Définir une bijection g de E_n sur E'_n.

Définir une bijection simple f de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout entier naturel n, $f(E_n) = E'_n$.

Conclure.

---

1 Cet exercice figure dans la séquence « Autant, moins ou plus ? »

2 On peut aussi avoir l'idée de raisonner ainsi : « On a $]\,0 ; 1\,[\subset [\,0 ; 1\,[\subset \mathbb{R}$. Or $]\,0 ; 1\,[$ et $\mathbb{R}$ ont la puissance du continu, donc $[\,0 ; 1\,[$ a la même puissance. » Cependant nous n'avons pas démontré le théorème correspondant, qui existe, mais qui est difficile à établir.

3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

a. Lemme

Soit A un ensemble et B et C deux parties de A, telles que : $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \varnothing$.
Si B et C sont équipotentes entre elles, alors les ensembles $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \setminus \mathrm{C}$ sont équipotents entre eux.

Démonstration :

D'après les hypothèses, il existe une bijection g de B dans C, de réciproque g^{-1}.
Définir à l'aide de g une bijection f de A sur lui-même telle que $f(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{B}$.
En déduire que $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \setminus \mathrm{C}$ sont équipotents.

b. On rappelle que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents.

Soit l'ensemble M suivant : $\mathrm{M} = \left\{n + \sqrt{2},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1 + \sqrt{2}\ ;\ 2 + \sqrt{2}\ ;\ ...\right\}$

Démontrer que M est équipotent à $\mathbb{Q}$.

Démontrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a la puissance du continu.