Vitesse, accélération et jerk

1. Bilan d'essai de mise en vitesse d'un véhicule automobile

L'exemple traité concerne les chiffres de mise en vitesse d'un véhicule, chiffres publiés dans une revue.

Nous utiliserons l'échelle de temps corrigée correspondant à une courbe lissée (justification ultérieure). La courbe obtenue sera V = V(t).

Tracer V = $f(t)$ jusqu'à t = 19,25 s avec 1 s ≙ 1 cm et V = 140 km/h avec 10 km/h ≙ 1 cm.

V (km/h)	t mesuré	t corrigé
0		0
10		0,4
20		0,9
30		1,5
40	2,2	2,2
50	3,1	3
60	3,8	3,9
70	4,8	4,9
80	5,6	6
90	7,4	7,25
100	8,8	8,7
110	10,4	10,45
120	12,4	12,65
130	15,7	15,5
140	18,6	19,25
150	24,5	24,3
160	32,6	32

2. Obtention de la courbe des espaces e = e(t)

Exemple

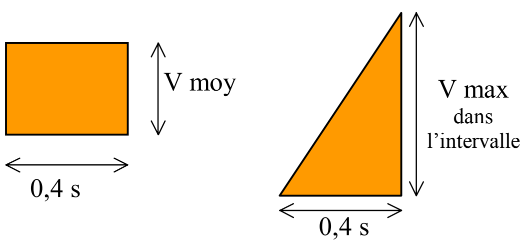
$e \approx$ Vitesse moyenne $\times$ Δt,

e en m, Vitesse moyenne en m.s^{-1}, Δt en s.

$$e_{0;10} = \frac{0+10}{2} \times \frac{1}{3{,}6} \times 0{,}4 = 0{,}555\,\text{m}.$$

Le terme $\frac{0+10}{2} \times \frac{1}{3{,}6}$ représente la vitesse moyenne en m.s^{-1} entre 0 et 10 km/h (attention aux unités...).

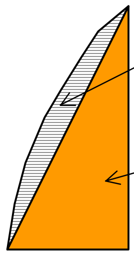
Interprétation géométrique de $e_{0\,;\,10}$:



Cet espace représente l'aire du rectangle ou du triangle représentés ci-dessus.

Remarque

Plus le pas de la résolution est petit, (Δ$t \to 0$), plus l'aire considérée se rapproche de l'aire sous la courbe. À la limite on obtient l'intégrale $e = \int_0^{0,4} V(t)\,.dt$ qui représente l'aire exacte. Celle-ci est proche de l'aire évaluée par la méthode du triangle.



La fonction V(t) n'est pas connue par une relation mathématique, mais seulement par ses valeurs numériques successives. Nous effectuerons donc une intégration numérique. En arrondissant les résultats par excès, nous aurons des valeurs assez proches de la réalité.

Ainsi nous obtenons le tableau suivant :

t = 0,4	e(0 ; 10) = 5 × 0,4 : 3,6 = 0,55 m	e(0 ; 10) = 0,55 m
t = 0,9 s	e(10 ; 20) = 15 × (0,9 – 0,4) : 3,6 = 2,08 m	e(0 ; 20) = 5,55 + 2,08 = 2,63 m

Établir le tableau t = { 0 ; 0,4 ; ... ; 19,25 }.

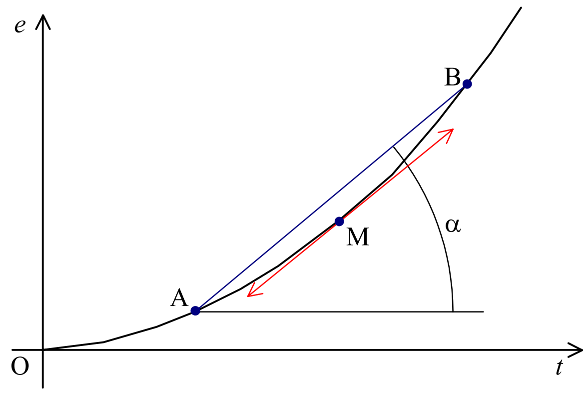
Représenter la courbe des espaces 1 s ≙ 1 cm, 1 m ≙ 1 mm

3. Problème réciproque

Retrouver V d'après la courbe des espaces.

Soit A (3,9 ; 37,4) et B (4,9 ; 55,5).

La fonction étant continue entre A et B, plus les points A et B seront rapprochés, plus la pente de la droite (AB) se rapprochera de la pente de la tangente à la courbe au point M milieu de [AB].

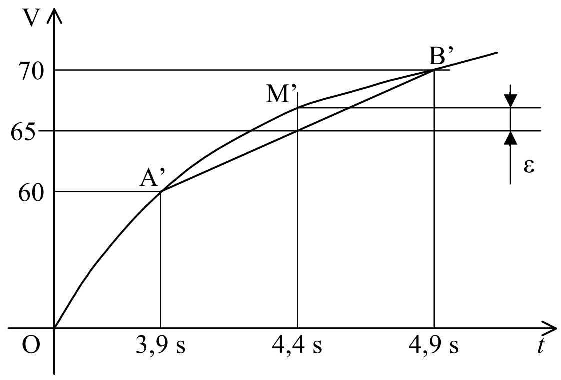


Le coefficient directeur de la tangente en M représente la valeur de la dérivée de e par rapport à t à l'instant t_M.

Ce coefficient directeur est proportionnel à la tangente de l'angle α (il ne serait égal que si le système d'axes était orthonormé). Soit a ce coefficient directeur.

$$a = \frac{e_B - e_A}{t_B - t_A} = \frac{55{,}5 - 37{,}4}{4{,}9 - 3{,}9} = 18{,}1\,\text{m/s}$$

soit 65,16 km/h, ceci à l'instant $t = \frac{3{,}9 + 4{,}9}{2} = 4{,}4$ s



Remarque

Sur la courbe V = V(t), nous pouvons interpréter que la vitesse à l'instant $t = 4{,}4$ s (temps moyen) est légèrement supérieure à V = 65 km/h (vitesse moyenne), sans garantir que ε soit égal à 0,16 km/h exactement.

4. Obtention de la courbe des accélérations

L'interprétation s'effectue sur la courbe des vitesses V = V(t) en évaluant la pente mesurée par tan(α).

$$\underset{\text{m/s}^2}{\tan\alpha'} = \frac{\overset{\text{m/s}}{v_{B'} - v_{A'}}}{\underset{\text{s}}{t_{B'} - t_{A'}}}$$

$$\tan\alpha' = \frac{\frac{70}{3{,}6} - \frac{60}{3{,}6}}{4{,}9 - 3{,}9} = 2{,}778\ \text{m/s}^2$$

d'où $\gamma = 2{,}778\ \text{m/s}^2$ pour $t = 4{,}4$ s

D'après la courbe des vitesses, les intervalles de temps sont toujours de 10 km/h, soit 2,778 m/s. Les dénominateurs correspondent aux intervalles de temps.

$$\gamma_{0;10} = \frac{2{,}778}{0{,}4} = 6{,}95\ \text{m/s}^{-2} \quad \text{à } t = \frac{0 + 0{,}4}{2} = 0{,}2\ \text{s}$$

Établir le tableau des accélérations aux « temps intermédiaires ».

Représenter $\gamma = f(t)$, 1 m.s^{-2} ≙ 1 cm.

5. Obtention de la courbe du Jerk ou secousse

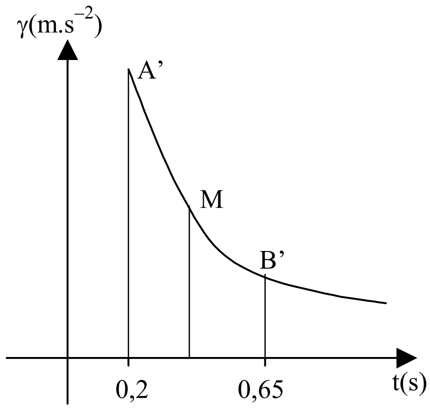
Une accélération génère des efforts.

Une variation d'accélération dans le temps (Jerk ou secousse) génère des variations d'efforts générateurs d'inconfort pour les occupants d'un véhicule.

Par la méthode numérique, nous obtenons :

$$\vec{J} = \frac{d\vec{\gamma}}{dt} \quad \text{soit} \quad J = \frac{\gamma_{B'} - \gamma_{A'}}{t_{B'} - t_{A'}}$$

J est exprimé en m.s^{-3}.



$$J_1 = \frac{5{,}55 - 6{,}95}{0{,}65 - 0{,}2} = -3{,}1\,\text{ms}^{-3} \quad \text{à } t = \frac{0{,}2 + 0{,}65}{2} = 0{,}425\,\text{s}$$

$$J_2 = \frac{4{,}63 - 5{,}55}{1{,}2 - 0{,}65} = -1{,}67\,\text{ms}^{-3} \quad \text{à } t = \frac{1{,}2 + 0{,}65}{2} = 0{,}925\,\text{s}$$

$$J_1 = \frac{3{,}97 - 4{,}63}{1{,}85 - 1{,}2} = -1{,}02\,\text{ms}^{-3} \quad \text{à } t = \frac{1{,}95 + 1{,}2}{2} = 1{,}525\,\text{s}$$

etc. d'où le tableau donnant t et $J = \dfrac{d\gamma}{dt}$.

Établir le tableau du jerk ou secousse = $f(t)$,

1 m.s^{-3} ≙ 2 cm

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{Vecteur}\\ \text{position}\\ \overrightarrow{\text{OM}}\end{array}} \arrow[r, shift left, "\text{De}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Vecteur}\\ \text{vitesse}\\ \overrightarrow{V}(\text{M})\end{array}} \arrow[l, shift left, "\text{In}"] \arrow[r, shift left, "\text{De}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Vecteur}\\ \text{accélération}\\ \overrightarrow{\gamma}(\text{M})\end{array}} \arrow[l, shift left, "\text{In}"] \arrow[r, shift left, "\text{De}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Vecteur}\\ \text{Jerk}\\ \overrightarrow{J}(\text{M})\end{array}} \arrow[l, shift left, "\text{In}"]
\end{tikzcd}$$

De : dérivation par rapport au temps
In : Intégration par rapport au temps

6. Interprétation plus réelle de la courbe des accélérations

L'accélération entre 0 et 0,2 s n'a pas été définie. Sa valeur théorique existe : elle est mesurée par la pente de la tangente à l'origine de la courbe V = V(t), soit $\gamma_0 = \tan\alpha_0$. Mais sa détermination est imprécise d'une part, et sans corrélation avec la réalité d'autre part.

Commentaires justificatifs

Zone OA. Fonction aléatoire dépendant de la vitesse à laquelle on relâche la pédale d'embrayage. Pour simplifier l'évolution, OA pourrait être un segment de droite (d"autres hypothèses peuvent exister).

Zone AB. Si les conditions d'adhérence ne permettent pas la pleine exploitation du moteur, il faudra limiter la puissance aux conditions d'adhérence où laisser les pneus glisser sur le sol. Nous aurons alors une phase d'accélération constante (l'hypothèse d'adhérence suffisante peut exister).

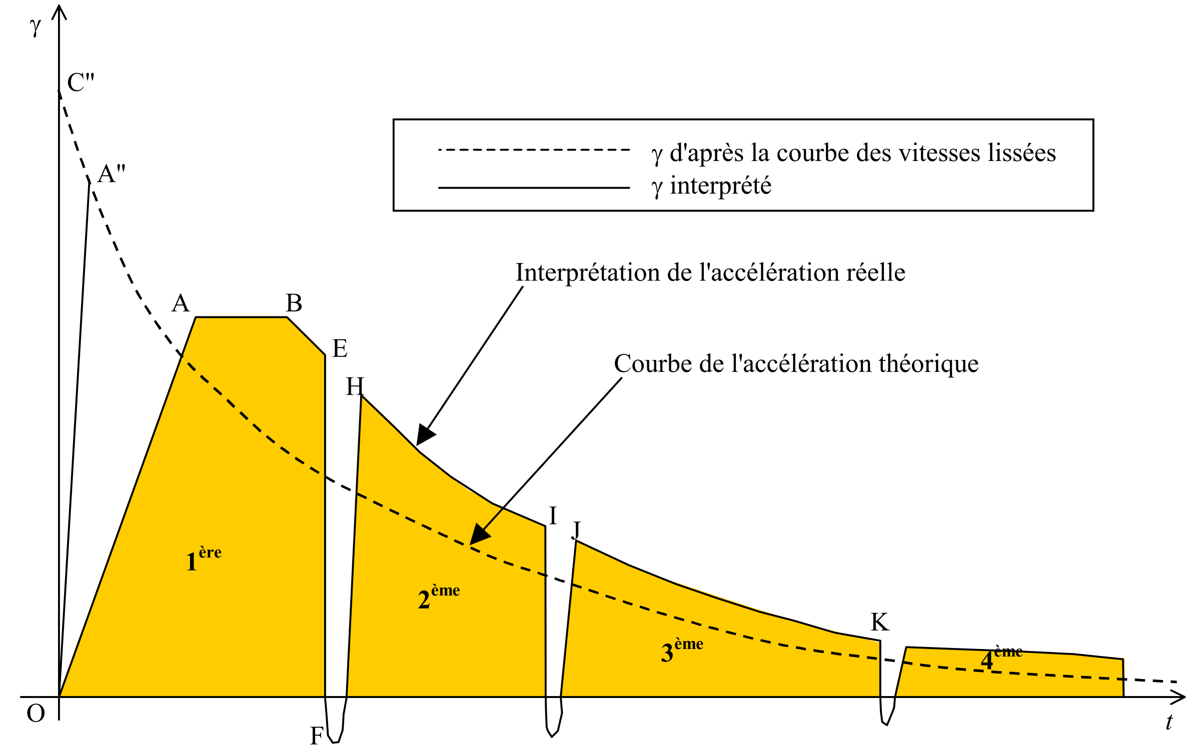
Zone BE. On retrouve une évolution semblable à celle de l'accélération théorique (même type d'évolution).

Zone EF. Phase débrayage. L'accélération devient brusquement nulle (et même négative un court instant).

Zone FG. et reste nulle pendant l'intervalle de temps de passage du rapport.

Zone GH. Afin de retrouver l'accélération du deuxième rapport lorsque l'embrayage est totalement relâché.

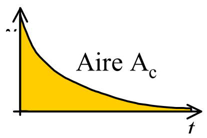
Zone HI. On retrouve une évolution semblable à celle de l'accélération théorique.



Remarques

- L'échelle des temps corrigés est considérée correcte si globalement les mises en vitesse réelle mesurée et corrigée restent cohérentes. Or ces vitesses sont :

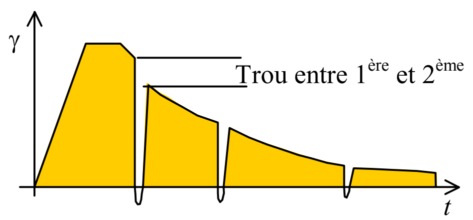
$V\text{corrigée} = \int_0^t \gamma(t).dt$ avec $\gamma(t)$ corrigée . Représente l'aire :



$\text{Vréel} = \int_0^t \gamma(t).dt$ avec $\gamma(t)$ réel . Représente l'aire :

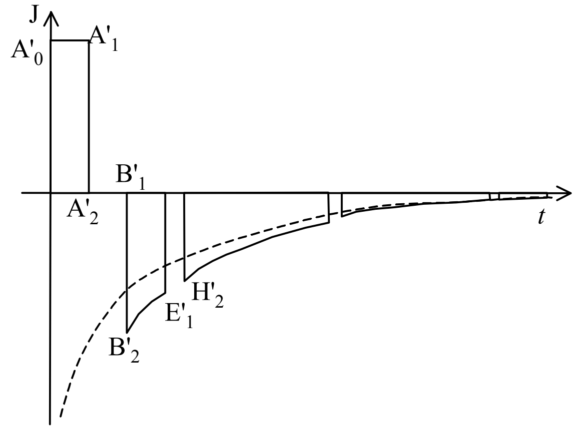
Il faut que Ar soit peu différent de Ac. Condition d'équivalence.

- La courbe γ réel interprété correspond à un échelonnement de boîte à vitesse tel que, lorsqu'un rapport est monté au régime de puissance maxi, on se retrouve après passage du rapport suivant, au régime de couple maxi. Un mauvais échelonnement se traduit par un trou d'accélération.



7. Interprétation plus réelle de la courbe de Jerk ou secousse

Rappel : $J = J(t) = \dfrac{d\gamma(t)}{dt} = \dfrac{d^2V(t)}{dt} = \dfrac{d^3OM}{dt}$



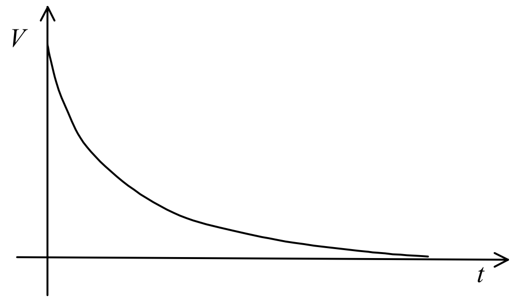
Cette fonction apparaît avec des discontinuités marquées.

- Par exemple, en considérant le point A de g = g(*t*) : sa dérivée à gauche (point A'1) provient du coefficient directeur de la tangente (la droite OA étant une hypothèse) ; sa dérivée à droite (point A'2) est nulle pour l'hypothèse accélération de A à B constante.
- L'évolution BE permet de justifier une évolution B'2E'1 semblable au jerk théorique.
- Dès qu'un rapport est changé, l'accélération est nulle. Elle est suivie d'une courte phase de patinage de l'embrayage et du synchroniseur, suivie d'une accélération décroissante.

8. Interprétation de la courbe des vitesses réelles

Évolution de V = V(t)

Route horizontale, véhicule au point mort, avec vitesse initiale. Les efforts résistants sont principalement aérodynamiques. Donc, forte décroissance en début d'essai, devenant faible en fin d'essai.

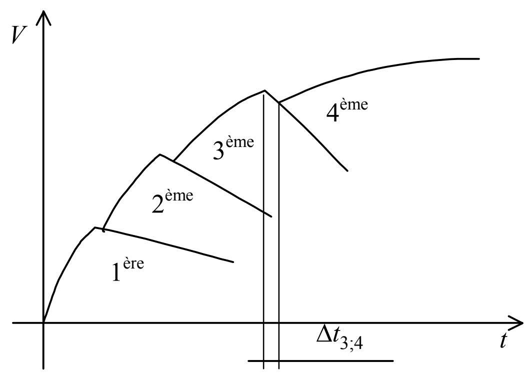


Temps morts de passage des vitesses

Nous retrouvons ces lois de décroissance durant le temps mort de passage des rapports.

Ainsi, durant $\Delta t_{1;2}$, faible décroissance de V

Durant $\Delta t_{3;4}$, forte décroissance de V.

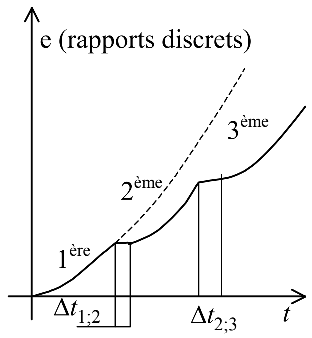


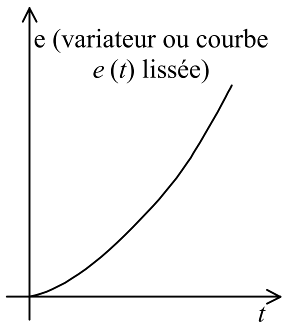
9. Interprétation de la courbe des espaces réels

Durant l'intervalle Dt12, la fonction e = e(t) reste croissante.

$$e(t) = \int_0^t V(t).dt$$

L'évolution de cette courbe est peu dissemblable de celle d'un véhicule à transmission par variateur.





10. Conclusion

- Concernant les différences entre courbe théorique lissées et courbes réelles interprétées : le temps de passage des rapports et le patinage (embrayage, roue) affectent assez peu la fonction primitive e =e(t), mais présentent des répercussions de plus en plus marquées sur les fonctions dérivées d'ordre supérieur.
- Il est probable que dans l'avenir les concepteurs de véhicules intègreront cet aspect, puisque, gérer $\dfrac{d\bar{\gamma}}{dt}$ consiste à mieux maîtriser le confort.
- L'antipatinage, les embrayages pilotés, les boîtes de vitesses automatiques, les transmissions continues, les propulsions par moteur électrique sont des solutions qui vont dans ce sens (plus ou moins directement).
- Tous ces procédés plus ou moins pilotés par l'électronique tendent à supprimer toute personnalisation de la conduite automobile (les sensations diminueront). L'objet automobile devient de plus en plus parfait à chaque évolution et de plus en plus impersonnel.
- Comment serait γ idéal ?

Essayons d'arrondir la courbe d'accélération, forcément décroissante, à partir d'un certain instant. On pourrait alors imaginer γ idéal, et donc une fonction jerk ou secousse traitée confortablement.