

# Chute dans l'air et résolution d'une équation différentielle

par **Guy BOUYRIE**  
Lycée Victor Louis - 33400 Talence  
bouyrie@wanadoo.fr

## RÉSUMÉ

*Nous étudions la chute dans l'air de deux balles de ping-pong dont l'une est lestée. La séquence AVI obtenue, disponible sur le serveur de l'UdP, est analysée puis traitée. Les données expérimentales qui en résultent permettent de procéder à diverses modélisations réalisables sur tableurs. L'algorithme d'Euler est appliqué ; le solveur disponible dans certains tableurs généralistes est également mis à contribution.*

## 1. PRÉSENTATION

Les nouveaux programmes de terminale S mettent l'accent sur le principe de la méthode d'Euler afin de résoudre de manière approchée une équation différentielle, en particulier lors de l'étude de la chute verticale d'un corps dans un fluide (BO août 2001, HS n° 4, p. 85). Il est intéressant d'illustrer ce propos par l'analyse du mouvement de balles de ping-pong en chute dans l'air. Les techniques développées pour cette étude sont désormais classiques en lycée : caméscope et carte d'acquisition vidéo, logiciel de traitement d'images, tableur-grapheur.

Dans un premier temps, nous allons tout d'abord montrer l'influence de l'air sur le mouvement d'une balle ; l'équation différentielle qui régit le mouvement observé peut facilement être résolue par un logiciel spécifique (GENERIS, REGRESSI, SYNCHRONIE...).

Dans un deuxième temps, nous allons chercher à résoudre cette équation différentielle à l'aide d'un tableur généraliste, tel EXCEL, en partant d'un algorithme élémentaire dit d'Euler.

## 2. UN PEU D'HISTOIRE...

La nécessité d'introduire le calcul différentiel est apparue dès le XVII<sup>e</sup> siècle. Isaac NEWTON et surtout son contemporain Gottfried Wilhelm LEIBNIZ ont jeté les bases du calcul différentiel. Les fondements de ce mode de calcul ont jeté un trouble profond sur la communauté scientifique car ils mettent à rude épreuve le sentiment commun sur la structure du temps et de l'espace - le continu, le discontinu.

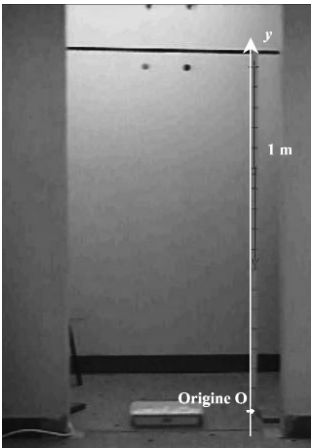
Par exemple, peut-on pour aller d'un point A à un point B augmenter graduellement et *indéfiniment* une grandeur qui permettra de déterminer la longueur *finie* du trajet qui va de A à B ? Peut-on imaginer une durée *infiniment petite* qui caractérisera un *instant* ?

Ces vieux problèmes, qui concernent les infinis dénombrables et ceux qui ne le sont pas, la notion de mouvement et de vitesse, le problème des quadratures de toutes sortes de courbes, ont déjà été posés par les philosophes grecs, tels Zénon et ses redoutables paradoxes (Achille et la tortue, ou encore ceux qui portent sur la nature du mouvement : « si une flèche en mouvement part d'un point donné A pour atteindre la cible B, elle doit avoir été en chacun des points qui séparent A de B ; or si elle est en mouvement, elle n'a occupé aucun point de l'espace, puisque le propre du mouvement est de ne jamais rester en un point donné de l'espace. Donc le mouvement n'existe pas ! Qui plus est, s'il y a une infinité de points, la flèche n'atteindra non plus jamais la cible ! »).

Ces questions sur la nature du continu, du discontinu, du tout et de sa partie, ont déjà été posées du temps de GALILÉE mais les outils mathématiques pour y accéder ont été trouvés plus tardivement.

On doit à LEIBNIZ, dont le rôle est si injustement oublié tant la gloire de NEWTON a écrasé celle de ses contemporains, l'invention autour des années 1700 de la « bonne écriture », cette écriture différentielle  $dx$ ,  $dy$  ou  $dt$  si importante et si difficile pour nos lycéens ! Les frères BERNOULLI, les MAUPERUIS, VARIGNON et autres d'ALEMBERT ont poursuivi cette œuvre qui va culminer avec les travaux de Léonhard EULER, le père du calcul intégral, des équations de l'hydrodynamique, au point que les célèbres lois de Newton sont plutôt celles qu'EULER a énoncées ! En point d'orgue, citons l'œuvre « géante » de LAGRANGE avec la publication en 1788 de la « Mécanique analytique » [1].

### 3. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL



On filme la chute libre comparée de deux balles de ping-pong, l'une ordinaire et l'autre lestée par de la limaille de fer. La prise de vue nécessite les quelques précautions habituelles : éclairage convenable (gare aux tubes à décharges !), vitesse d'obturation aussi courte que possible du diaphragme du caméscope (ici mis sur le mode « sportif », car les vitesses d'obturation ne sont guère désormais accessibles), recul suffisant pour filmer une hauteur de chute de 1,70 m sans parallaxe importante. Un repère des longueurs est ajouté (règle verticale marquée tous les 10 cm). Le montage du film est plus délicat (il est ici perfectible) : idéalement, la séquence devrait démarrer à  $t = 0$  de sorte que les balles commencent leur chute. Sinon, il faudra corriger l'échelle des temps dans le logiciel de traitement des

données (ce qui a été fait ici). La séquence complète peut être visualisée à partir du fichier *ChuteBallesPingPong.avi* qui est disponible en complément de cet article sur le serveur de l'UDP :

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

#### 4. EXPLOITATION DES DONNÉES

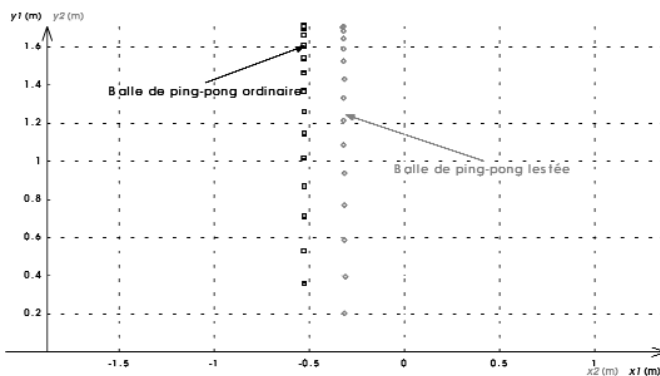
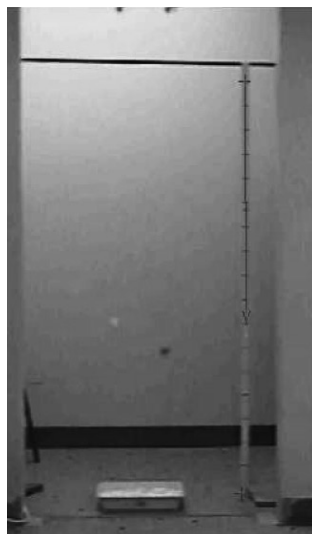


Figure 1

Les images ont été traitées à l'aide du module REGAVI de REGRESSI : les différents pointés des positions des deux balles doivent être assurés avec beaucoup de soin pour que les modélisations envisagées soient pertinentes. Fonctions de ZOOM, possibilité de déplacer précisément le curseur de pointage avec les flèches du clavier sont ici appréciées. Le travail proposé peut démarrer dès que les résultats des pointés sont transférés dans le tableur REGRESSI : les coordonnées des centres de gravité  $G_1$  et  $G_2$  des deux balles sont alors acquises ;  $G_1(x_1, y_1)$  est relatif à la balle de gauche, balle de ping-pong ordinaire alors que  $G_2(x_2, y_2)$  repère les positions de la balle de droite, balle lestée. Pour ceux qui en auraient douté, la balle de droite touche le sol la première ! Plusieurs activités sont alors possibles :

- ◆ calculer les coordonnées verticales  $V_{y_1}$  et  $V_{y_2}$  du vecteur vitesse  $\vec{V}$  des centres d'inertie des deux balles ;
- ◆ modéliser les évolutions temporelles de ces coordonnées par la résolution des équations différentielles relatives aux mouvements avec REGRESSI ;
- ◆ reconstruire les courbes  $V_{y_1} = f(t)$  et  $y_1 = f(t)$  par des calculs itératifs menés sur un tableur classique, tel EXCEL.



## 5. MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME

- ◆ La balle de ping-pong est soumise à la résistance à l'avancement de l'air  $\vec{F}_a$ , à la poussée d'Archimède  $\vec{A}$  et à la force de pesanteur  $\vec{P} = m \vec{g}$ .

Pour simplifier l'étude, on négligera le rôle de la poussée d'Archimède devant celui des autres forces, même dans le cas de la balle de ping-pong non-lestée ( $m \approx 2,70$  g avec  $R \approx 1,9$  cm).

Dans ce dernier cas, l'intensité du poids de la balle est soixante-dix fois plus intense que celle de la poussée d'Archimède :  $P$  est voisin de 26 mN alors que  $A = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho_{\text{air}} \cdot g$  vaut près de 0,36 mN.

- ◆ La résistance de l'air peut être modélisée de deux façons :

– aux faibles vitesses :  $\vec{F}_a = -\lambda \vec{v}$  ;

– alors qu'à des vitesses plus importantes :  $\vec{F}_a = -K v^2 \frac{\vec{v}}{v}$  ;

$K$  est un coefficient caractéristique qui fait intervenir la surface  $S$  du « maître couple » (plus grande surface d'un plan de coupe de la balle pris perpendiculairement à la direction de la vitesse), la masse volumique de l'air  $\rho_{\text{air}}$ , un coefficient caractéristique  $C_x$  propre à la forme de l'objet de sorte que  $K = C_x \rho_{\text{air}} \pi R^2$ .

La deuxième loi de Newton appliquée à la balle donne :  $\vec{P} + \vec{F}_a = m \vec{a}$ .

Par projection suivant l'axe vertical  $O_y$  (orienté vers le haut) qui est l'axe selon lequel s'opère le mouvement observé, on a :  $P_y + F_{ay} = m a_y$  avec  $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ .

Suivant le modèle donné à  $\vec{F}_a$ , on obtient :

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{\lambda}{m} v_y \quad (1)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g + \frac{K}{m} v_y^2 \quad (2)$$

Enfin, si l'on néglige l'action de l'air, on a :

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \quad (3)$$

*Nous obtenons donc des équations différentielles que nous ne chercherons pas ici à intégrer à la « main » : le but est de modéliser l'évolution temporelle de la coordonnée  $v_y$  (des valeurs « échantillonnées » de celle-ci sont par ailleurs connues à partir de l'acquisition des différentes coordonnées verticales  $y$  des balles).*

## 6. RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : CHOIX DU MODÈLE

Il s'agit de résoudre ces équations différentielles, à l'aide d'un logiciel tel que REGRESSI. L'intérêt de l'étude est de déterminer quelle équation modélise au mieux l'évolution temporelle de la coordonnée  $v_y$  de la vitesse de chute libre de la balle, qu'elle soit lestée ou non. Préalablement, à partir des grandeurs acquises, on fait calculer par un ajustement parabolique sur cinq points les valeurs de cette coordonnée  $v_y$  pour l'une ou l'autre des deux balles. On appelle  $V_{y1}$  celle relative à la balle ordinaire et  $V_{y2}$  celle de la balle lestée.

Par observation des profils tirés de l'expérience de  $V_{y1}$  et  $V_{y2} = f(t)$ , un élève doté d'un minimum d'intuition va tester pour la balle non-lestée l'un ou l'autre des modèles (1) et (2). Par contre, on peut se contenter de l'équation (3) pour la balle lestée : on est pratiquement dans la situation expérimentale des premiers instants de la chute d'une bille (déjà étudiée en première S). On peut aussi tout tester : cela va vite sur ordinateur : le modèle retenu est celui qui s'ajuste au mieux des points expérimentaux !

Sur REGRESSI, on définit le paramètre  $g$ , on pose  $k = \frac{\lambda}{m}$  ; dans la fenêtre de modélisation, la syntaxe pour lancer la résolution de l'équation différentielle est de la forme :  $y' = -Ay - B$ . Voici ce que l'on obtient au mieux (cf. figure 2).

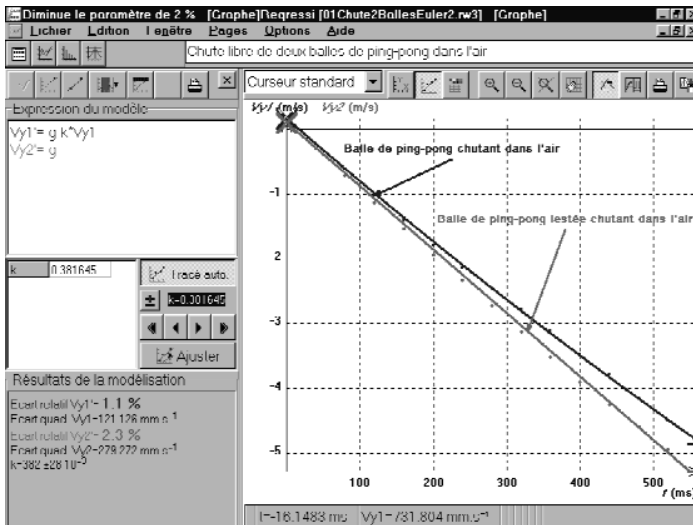


Figure 2

### ChuteBallesPing-Pong.rw3

Vous pouvez essayer les autres modèles à partir de la feuille de calcul au format REGRESSI (ce fichier est disponible en complément de cet article sur le serveur de l'UdP) si vous disposez de ce logiciel. Retenons que l'équation (1) pilote au mieux le mouvement de la balle ordinaire de ping-pong. On modélise alors la résistance de l'air par  $\vec{F}_a = -\lambda \vec{v}$ , avec  $\lambda = k \cdot m$ , soit environ  $1.10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ . Par contre, tout se passe comme si la balle lestée n'était soumise, sur la durée totale de l'enregistrement (à peine plus de 0,6 s !) qu'à la seule force de pesanteur !

Maintenant, il est utile d'aller plus loin : que fait le logiciel pour résoudre numériquement ces équations différentielles ? Il est hors de propos de donner ici l'algorithme de Runge-Kutta [2] qui est au cœur du « moteur » de simulation de REGRESSI. Cependant, le programme de terminale S nous invite à essayer de mettre en place un algorithme élémentaire qui procède par itérations successives : *l'algorithme d'Euler*.

## 7. SIMULATION DU MOUVEMENT DE LA BALLE NON-LESTÉE PAR LA MÉTHODE D'EULER

Nous allons retenir l'équation (1) (mais nous pourrions très facilement appliquer la méthode qui va être exposée aux autres équations différentielles (2) et (3) ; cette dernière (3) est quelque peu triviale...).

La démarche d'EULER consiste à intégrer l'équation en  $v_y$  en prenant pour définition

de la dérivée l'algorithme suivant :  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , soit par exemple :

$$V'_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(V_y)_{t+\Delta t} - (V_y)_t}{\Delta t}$$

si l'on considère deux valeurs successives  $i$  et  $i + 1$  de la vitesse  $V_y$ , le pas  $h$  est la durée  $\tau$  de succession des images, soit  $\Delta t = \tau = 40 \text{ ms}$ . Ce pas  $h$  n'est pas infiniment petit, mais il reste petit devant la durée totale de l'enregistrement. On a donc approximativement :

$$a_y \approx \frac{\Delta V_y}{\Delta t}, \text{ soit } (a_y)_i \approx \frac{(V_y)_{i+1} - (V_y)_i}{\tau}$$

L'équation (1) devient alors :

$$\frac{(V_y)_{i+1} - (V_y)_i}{\tau} = -g - k \cdot (V_y)_i \Rightarrow (V_y)_{i+1} = (V_y)_i - \tau \cdot [g + k \cdot (V_y)_i] \tag{4}$$

De même :

$$\frac{(y)_{i+1} - (y)_i}{\tau} = (V_y)_i \Rightarrow (y)_{i+1} = (y)_i + \tau \cdot (V_y)_i \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) permettent de déterminer, par itérations successives, les lois horaires du mouvement vertical de la balle de ping-pong. C'est le principe de résolution d'une équation différentielle par l'algorithme d'EULER. Deux conditions initiales sont nécessaires : la valeur initiale de la vitesse ou  $(V_y)_0$  et celle de la hauteur initiale  $(y)_0$  de

la balle. C'est le dispositif expérimental utilisé qui les fixe (ici,  $(V_y)_0 \approx 0$  et  $(y)_0 \approx 1,70$  m.

Dans un premier temps, on peut proposer pour valeur de  $k = \frac{\lambda}{m}$  celle issue de la modélisation. Les calculs sont alors réalisés sur EXCEL. La feuille de calcul **ChuteBalle-Ping-pong.xls** est disponible en complément de cet article sur le serveur de l'UdP. La feuille de calcul a été préalablement chargée avec les valeurs expérimentales issues du fichier de REGRESSI (il suffit, d'un clic droit, de recopier le tableau *via* le presse-papier puis de le coller dans EXCEL ; ou encore, ce qui marche avec tous les logiciels, d'enregistrer le fichier REGRESSI au format (.txt) puis de le récupérer dans EXCEL).

Si l'on veut ultérieurement parfaire cette modélisation, au lieu de saisir dans les formules la valeur numérique de  $k$ , il est préférable de nommer une cellule «  $k$  », par l'instruction INSERTION NOM DÉFINIR, à une adresse absolue (ici \$H\$5) qui sera désormais celle où sera inscrite la valeur de  $k$ . Toute modification de la valeur de  $k$  sera ainsi automatiquement répercutée dans les calculs. Les valeurs initiales sont ici posées en D5 et E5. La cellule D6, qui porte sur le calcul de  $V_y$  s'écrit : =D5-(9,8+k\*D5)\*0,04 et  $k$  fait en réalité référence à l'adresse absolue \$H\$5. Cette formule est ensuite recopiée vers le bas. De même, en E6, on a : =E5+D5\*0,04, formule qui elle-même est recopiée vers le bas. En introduisant la valeur  $k = 0,382$ , on obtient le tableau suivant (cf. figure 3).

t	y1	Vy1	Vy	y	Paramètres : g = 9,8 m / s <sup>2</sup>
s	m	m/s	m/s	m	v = 0,04 s
0,00	1,7080	0,1631	0,0000	1,7080	k = 0,382
0,04	1,7037	-0,2337	-0,3820	1,7080	
0,08	1,6889	0,8308	0,7780	1,6929	0,379593585
0,12	1,6582	1,0274	1,1581	1,6618	
0,16	1,6019	1,1110	1,5324	1,6155	
0,20	1,5107	1,7990	1,9010	1,5512	
0,24	1,4617	-2,1471	-2,2640	1,4781	
0,28	1,3679	-2,4601	-2,6214	1,3876	
0,32	1,2602	-2,7998	-2,9733	1,2827	
0,36	1,1457	-3,1172	-3,3199	1,1638	
0,40	1,0173	-3,4744	-3,6612	1,0310	
0,44	0,0691	-3,7952	-3,9972	0,0045	
0,40	0,7111	-4,1462	-4,3201	0,7247	
0,52	0,5204	-4,4961	-4,6540	0,5515	
0,56	0,3556	-4,0461	-4,9749	0,3654	

Figure 3

On peut remarquer que les valeurs calculées pour  $V_y$  et  $y$  sont proches de celles acquises, à savoir respectivement  $V_{y1}$  et  $y_1$ , mais les valeurs de la vitesse sont toujours sur-

estimées en valeur absolue, de par la structure même de l'algorithme. Il est d'ailleurs judicieux de comparer les profils graphiques des grandeurs acquises et des grandeurs calculées (équations horaires du mouvement). Voilà ce que l'on observe avec EXCEL (cf. figures 4 et 5).

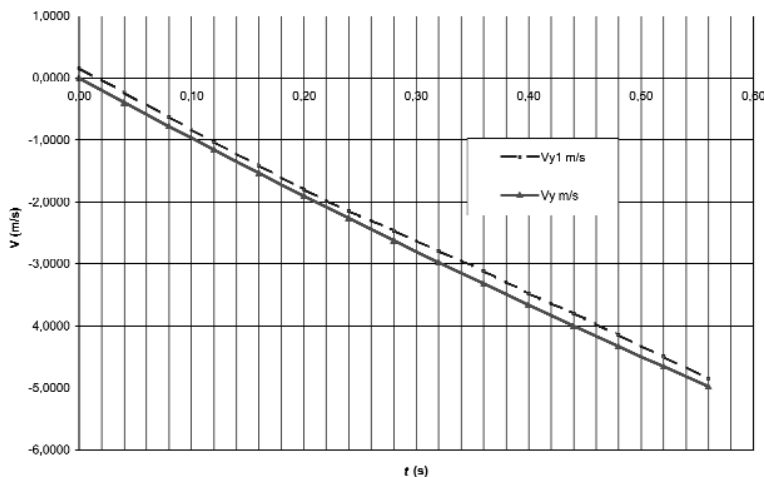


Figure 4 : Chute d'une balle de ping-pong dans l'air.

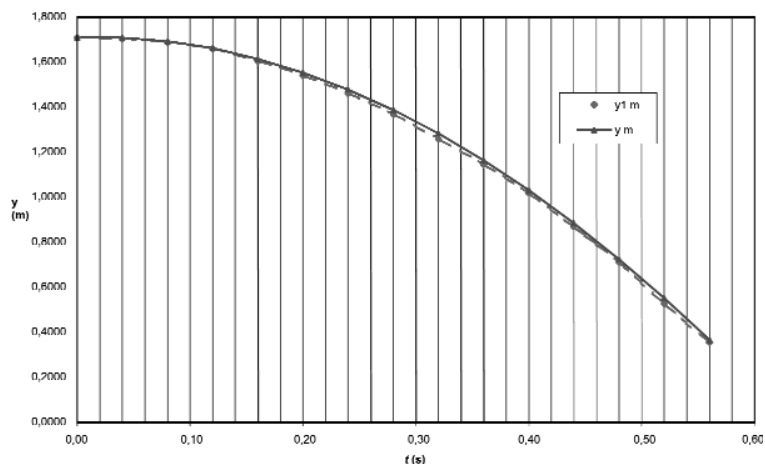


Figure 5 : Évolution temporelle de la hauteur de chute.

Ici, les écarts les plus importants concernent la loi horaire qui porte sur l'évolution temporelle de la vitesse. EXCEL permet de calculer la **somme quadratique** [3]  $S$  définie par :

$$S = \sum_i (V_{y_1 i} - V_{yi})^2$$



c'est la fonction =SOMME.XMY2 qui porte ici sur les colonnes C et D. D'où la syntaxe : =SOMME.XMY2(C5:C19;D5:D19). Ce calcul est fait dans la cellule G7.

Si l'on avait sauté l'étape de résolution de l'équation différentielle dans REGRESSI, on peut alors dans EXCEL, grâce à son **solv**eur (OUTIL SOLVEUR) chercher à minimiser la somme quadratique  $S$ . La cellule « cible » est celle qui porte sur l'inconnue, à savoir  $k$  à l'adresse absolue \$H\$5. On obtient alors l'écran suivant (cf. figure 6).

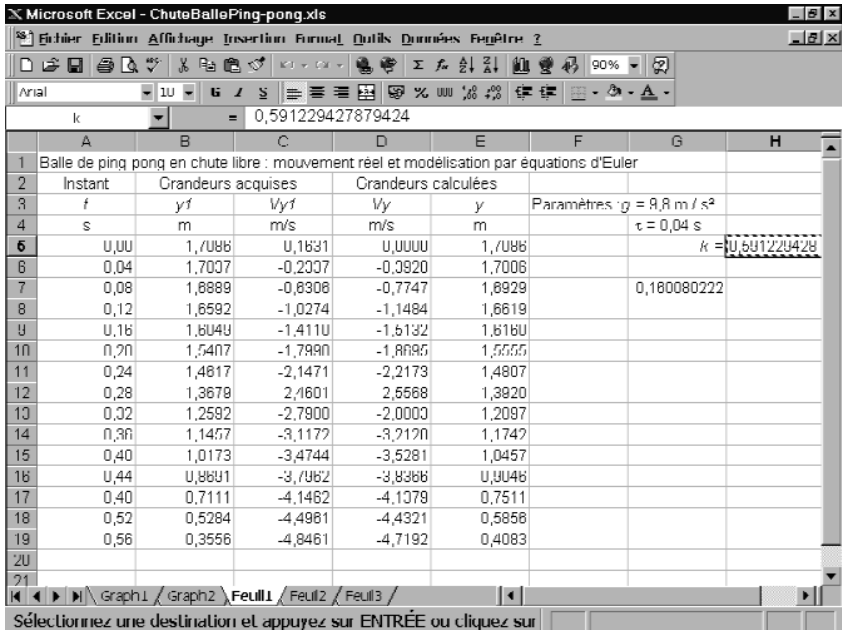


Figure 6

et les représentations graphiques suivantes (cf. figures 7 et 8).

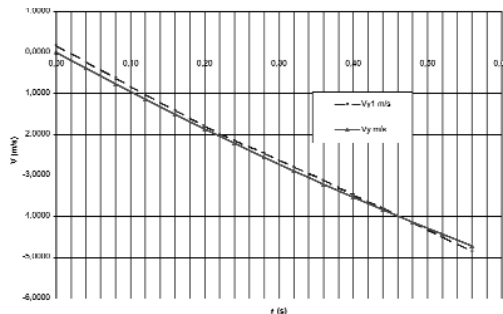
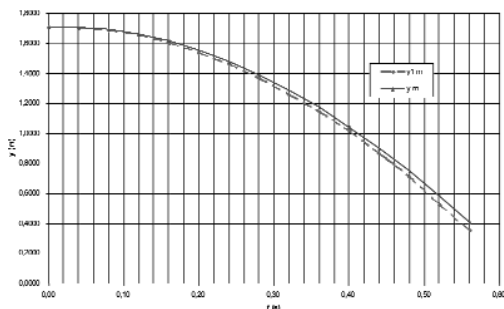


Figure 7 : Chute d'une balle de ping-pong dans l'air.



**Figure 8 :** Évolution temporelle de la hauteur de chute.

L'ajustement est meilleur que dans la situation précédente, au prix d'une modification importante du paramètre  $k$  dont la valeur passe de  $0,382$  à ...  $0,591 \text{ s}^{-1}$  ! La méthode qui consiste à minimiser  $S$  ne peut certes pas corriger les valeurs au départ « surestimées » de  $V_y$  !

On doit donc faire plus confiance au résultat établi sous REGRESSI ( $k = 0,382 \text{ s}^{-1}$ ) car l'algorithme développé (*Runge-Kutta*) est nettement supérieur à celui d'EULER, algorithme simple sur deux points successifs, où la détermination de la vitesse sera fatalement majorée ou minorée suivant que l'on pose :

$$v_{i+1} = v_i + \tau \cdot a_i \quad \text{ou} \quad v_i + \tau \cdot a_{i+1}$$

## CONCLUSION

Les mouvements de chute libre dans l'air se prêtent merveilleusement à une initiation de résolution numérique d'une équation différentielle.

On peut, dans un premier temps, mettre en œuvre l'algorithme d'EULER (en donnant toutes les valeurs des paramètres utiles) sur un fichier de données récupéré dans un tableur généraliste comme EXCEL (à l'usage, c'est beaucoup moins compliqué qu'il n'y paraît).

Pour les fanatiques de la modélisation, on peut aller jusqu'à l'utilisation du solveur d'EXCEL (minimisation de la somme quadratique  $S$ ) afin d'estimer la valeur d'un paramètre *a priori* inconnu (ici  $k = \frac{\lambda}{m}$ ). C'est une activité qui rentrerait bien dans le cadre d'un TPE (Travaux personnels encadrés).

Puis, dans un deuxième temps, on pourrait faire résoudre cette équation différentielle par un tableur-grapheur tel que REGRESSI, SYNCHRONIE, etc., sachant que ces logiciels spécialisés utilisent des algorithmes plus performants.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Lire le remarquable HS des *Cahiers de Sciences & Vie*, avril 1997, n° 38 : « Qui a inventé le calcul intégral » ?
- [2] Sur *Runge-Kutta*, lire « Informatique et électronique » (MEN - CNDP) par le groupe EVARISTE.  
Lire aussi les nombreuses contributions de J.-C. TRIGEASSOU, D. BEAUFILS et J. WINTHER dans le BUP ou les actes des Journées informatiques de l'UdP (Toulouse 1990 en particulier).
- [3] Consulter les documents « Méthodes numériques et sciences physiques » par P. MAX, C. PRAVDA et M. SCHWING en partie publiés sur le site Internet de l'académie de Nancy-Metz.  
Lire aussi les articles de C. RABALLAND :  
– Équations différentielles et sciences physiques, terminale S, classes préparatoires. *Bull. Un. Phys.*, février 1996, vol. 90, n° 781, p. 265-286.  
– Mesures et modélisation en sciences physiques. *Bull. Un. Phys.*, février 1996, vol. 90, n° 781, p. 287-296.  
Lire également *Mécanique fondamentale 1* de P. DESMOND et M. MALINGRE Did. Éditions, un livre qui renouvelle le genre.

*En complément de cet article, Jean WINTHER propose, ci-dessous, une bibliographie, non exhaustive, d'articles sur les méthodes numériques déjà parus dans le BUP. Cette bibliographie a été établie avec BUPDOC 3.*

- ◆ DUREY A., LAURENT M. et JOURNEAUX R. Avec des micro-ordinateurs, faire de la physique d'abord ! *Bull. Un. Phys.*, mars 1983, vol. 77, n° 652, p. 757-780.
- ◆ DUREY A. et WINTHER J. Didactique de l'utilisation de l'ordinateur en sciences physiques. *Bull. Un. Phys.*, février 1991, vol. 85, n° 731, p. 225-249.
- ◆ BEAUFILS D. Outils numériques de modélisation in « Les outils informatiques d'investigation... Actes de l'université d'été, Nancy 1993 ». *Bull. Un. Phys.*, septembre 1993, vol. 87, n° INF-P30, p. 45-52.
- ◆ BEAUFILS D. et MITRE D. Quelques outils numériques de base pour l'analyse de données et la modélisation in « Les outils informatiques d'investigation... Actes de l'université d'été, Nantes 1995 ». *Bull. Un. Phys.*, septembre 1995, vol. 89, n° INF-P33, p. 25-35.
- ◆ WINTHER J. Les équations différentielles dans le programme de physique de la classe de terminale scientifique. *Bull. Un. Phys.*, février 1996, vol. 90, n° 781, p. 249-264.
- ◆ GARCIA J. Résolution de l'équation de Van der Pol. *Bull. Un. Phys.*, décembre 1996, vol. 90, n° 789, p. 1847-1853.

- ◆ BOURGES V. Utilisation de MAPLE en simulation : exemple de l'oscillateur paramétrique. *Bull. Un. Phys.*, décembre 1997, vol. 91, n° 799, p. 2125-2137.
- ◆ SERRA G. Résolution des équations différentielles par les méthodes de l'analyse numérique. *Bull. Un. Phys.*, juin 1999, vol. 93, n° 815 (1), p. 965-976.



**Guy BOUYRIE**  
*Professeur*  
Lycée Victor Louis  
Talence (Gironde)