Chapitre 4
Lois discrètes

1. Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X est une variable de Bernoulli si elle ne prend que les valeurs 0 et 1 avec des probabilités non nulles.

$P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p = q$, avec $p \in]\,0\,;1\,[$.

Une variable aléatoire de Bernoulli illustre toute expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles et effectuée une seule fois.

Traditionnellement le « succès » correspond à la valeur 1 et l'« échec » à la valeur 0.

$E(X) = 1.p + 0.(1 - p) = p$

$V(X) = (0 - p)^2\,(1 - p) + (1 - p)^2\,p = p\,(1 - p)$

En résumé $E(X) = p$ et $V(X) = pq$.

2. Loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$

2.1. L'expérience de référence standard

Une urne contient deux catégories de boules : des blanches en proportion p et des noires en proportion $1 - p$. On effectue n tirages successifs d'une boule **avec remise**. On appelle X le nombre de boules blanches obtenues au cours de cette expérience.

2.2. Les résultats de base

Loi de X : $P(X = k) = C_n^k\, p^k (1 - p)^{n-k}$, $k = 0;1;\ldots;n$.

Espérance, écart-type.

X peut être considérée comme la somme de n variables de Bernoulli X_i où $X_i = 1$ si la boule tirée au i-ème tirage est blanche et $X_i = 0$ sinon.

On a, pour tout $i \in \{1\,;2\,;\ldots;n\}$, $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = 0) = 1 - p = q$.

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

Les variables aléatoires X_i peuvent être considérées comme indépendantes. Donc :

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \big(V(X_i)\big) = npq.$$

2.3. Fréquence binomiale

X suit la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$.

La fréquence est la variable $F = \dfrac{X}{n}$ d'où $E(F) = \dfrac{1}{n}E(X) = p$ et $V(F) = \dfrac{1}{n^2}V(X) = \dfrac{pq}{n}$.

En résumé :

X suit la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$.

$P(X = k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0;1;\dots;n$

$E(X) = np \qquad V(X) = npq \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$

$F = \dfrac{X}{n} \qquad E(F) = p \qquad V(F) = \dfrac{pq}{n} \qquad \sigma(F) = \sqrt{\dfrac{pq}{n}}$

3. Loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(N\,;n\,;p)$

3.1. Le modèle

Une urne contient deux catégories de boules : des blanches en proportion p et des noires en proportion $q = 1 - p$. Si N est le nombre de boules dans l'urne, il y a $N\,p$ boules blanches et $N(1 - p)$ boules noires.

On effectue n tirages successifs d'une boule **sans remise**.

On appelle X le nombre de boules blanches obtenues au cours de cette expérience.

On sait que ce type de tirage est équivalent à un tirage exhaustif de n boules.

Ceci est à rapprocher du prélèvement d'un échantillon de n boules dans l'urne.

3.2. La loi

$$\forall k \in [0\,;n],\ P(X = k) = \frac{C_{Np}^k\, C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^k} \quad ; \quad E(X) = np \quad ; \quad V(X) = npq \times \frac{N-n}{N-1}$$

On peut remarquer que $\mathcal{H}(N\,;n\,;p)$ et $\mathcal{B}(n\,;p)$ ont même espérance mathématique. La variance ne diffère que du **coefficient d'exhaustivité** $\dfrac{N-n}{N-1}$.

3.3. Convergence en loi

On montre que, pour n et p fixés et pour X_N suivant $\mathcal{H}(N\,;n\,;p)$, X_N converge en loi vers une variable X qui suit $\mathcal{B}(n\,;p)$. C'est-à-dire $\lim\limits_{N \to +\infty} P(X_N = k) = P(X = k)$

L'intérêt est énorme : si N est grand et n petit par rapport à N, on peut remplacer la loi hypergéométrique (qui dépend de trois paramètres) par la loi binomiale qui ne dépend que de deux paramètres et pour laquelle il existe des tables.

En pratique, si $n < 0{,}1\,N$, on considère qu'un tirage exhaustif (tirage un à un sans remise) est équivalent à un tirage non exhaustif (tirage un à un avec remise).

4. Loi de Poisson

4.1.Le cadre d'intervention

C'est une « loi limite ». On verra que, sous certaines conditions, une loi de Poisson est limite d'une loi binomiale.

Dans la pratique une telle loi est utilisée pour approcher et décrire des phénomènes où les conditions d'application de la loi binomiale sont réunies (répétitions indépendantes d'une même épreuve dichotomique), où la probabilité du cas favorable est faible et où le nombre d'épreuves est grand.

4.2. La loi

La variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda>0$) lorsque :

- X a pour ensemble de valeurs $\mathbb{N}$
- $P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\quad (k=0\,;1\,;\ldots\,;n\,;\ldots)$

Alors : $\quad E(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)=\lambda \qquad V(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}(k-\lambda)^2\,P(X=k)=\lambda$

4.3. Extraits des tables de la loi de Poisson fournis lors les épreuves de BTS

$$P(X=k)=e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!} \quad ; \quad E(X)=V(X)=\lambda$$

k\λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6			0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
7						0,0000	0,0000	0,0000
8								
9								
10								

k\λ	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,175	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,175	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8	0,000	0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9		0,000	0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10			0,000	0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12				0,000	0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14					0,000	0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15						0,000	0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,001	0,002	0,006	0,013
18								0,000	0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,001	0,002
21										0,000	0,001
22											0,000

4.4. Quelques exemples

Exercice 1

Dans une certaine usine il se produit, en moyenne, cinq accidents par an. On suppose que le nombre d'accidents suit une loi de Poisson.

Calculer la probabilité pour qu'il ne dépasse pas sept.

Quelle est la probabilité d'avoir une année sans accident ?

Solution

La variable aléatoire X égale au nombre d'accidents suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

$$P(X \leq 7) = \mathrm{e}^{-5} \sum_{k=0}^{k=7} \frac{5^k}{k!} \simeq 0{,}87$$

$$P(X = 0) = \mathrm{e}^{-5} \simeq 6{,}7 \times 10^{-3}$$

Exercice 2

Pour une femme ayant eu entre 50 et 52 ans en l'an 2000, le nombre d'enfants, noté X, suit une loi de Poisson de paramètre inconnu λ. Un échantillon de 1 000 de ces femmes donne 135 femmes sans enfant.

1. Donner une estimation de λ.
2. Estimer la proportion de ces femmes ayant plus de trois enfants.

Solution

Si on admet que l'échantillon est représentatif de la population, on a $P(X = 0) = e^{-\lambda} \approx 0{,}135$.

Donc $\lambda \approx -\ln(0{,}135) \approx 2$.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6}\right) \simeq 0{,}145\,.$$

Parmi les femmes qui ont eu entre 50 et 52 ans en l'an 2000, il y en a donc environ 145 sur 1000 qui ont plus de trois enfants.

4.5. Loi binomiale et loi de Poisson

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;\,p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$.

Alors (X_n) converge en loi vers une variable de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

En pratique :

Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p.

Si $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$ et $np < 15$ alors X suit approximativement la loi de Poisson de paramètre np.

Exemple 1

Une usine fabrique des CD ROM en quantité importante. Une étude statistique a montré que 2 % de ces CD étaient défectueux. Pour effectuer un contrôle de fabrication, on prélève au hasard 150 CD. On note X le nombre de CD défectueux dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? En préciser les paramètres.
2. Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi de X ? Calculer P(X > 3)

Solution

1. Soit N est le nombre total de CD produits. L'étude statistique montre que 2% des CD sont défectueux. On prélève un échantillon de 150 CD. Le nombre de CD défectueux dans l'échantillon suit donc la loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(N\ ;\ 150\ ;\ 0{,}02)$.

Mais d'une part N est grand et d'autre part on peut considérer que 150 est petit par rapport à N ($< 0{,}1\ N$). Dans ces conditions on peut assimiler le prélèvement des 150 CD à un prélèvement un à un avec remise et donc considérer que les 150 CD sont prélevés indépendamment les un des autres.

X suit donc, à peu de choses près, la loi binomiale de paramètre $n = 150$ et $p = 0{,}02$.

2. n est grand ($n \geq 30$), p est faible ($p \leq 0{,}1$) et $np = 3$ est inférieur à 15. On peut donc utiliser la loi de Poisson de paramètre 3 comme approximation.

$$P(X > 3) \simeq 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3)$$

$$\simeq 1 - \mathrm{e}^{-3}\left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6}\right) \simeq 0{,}35$$

Exemple 2

On suppose qu'une urne contient 1 boule blanche et 99 boules noires.

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.

Déterminer n pour que la probabilité de tirer au moins une fois la boule blanche soit supérieure ou égale à 0,95.

Solution

Soit X la v.a. égale au nombre de fois où on tire la boule blanche au cours de n tirages. X suit B(n ; 0,01). $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}99^n$

Si on veut que $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$, il faut $(0{,}99)^n \leq 0{,}05$, soit $n \geq \dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}99)}$

i.e. $n \geq 298{,}1$ et donc $n \geq 299$.

Il faut donc effectuer 299 tirages au moins pour être sûr, à 95 %, d'avoir au moins une boule blanche.

Calcul approché

n est grand, p est faible. On essaye d'approcher X par une variable de Poisson de paramètre $\dfrac{n}{100}$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\frac{n}{100}}$.

Donc, pour avoir $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$, il faut $e^{-\frac{n}{100}} \leq 0{,}05$, soit $n \geq -100.\ln(0{,}05)$

Donc $n \geq 299{,}6$ et par suite $n \geq 300$

4.6. Processus de Poisson

Soit T une période de temps que l'on subdivise en n intervalles d'égale amplitude Δt. On a donc $T = n\,\Delta t$.

¤ Si, à l'intérieur de chacun de ces intervalles, la probabilité qu'un événement A se produise est constante et égale à p,

¤ Si, de plus, on admet que l'événement A ne peut se produire qu'au plus une fois à l'intérieur de chaque intervalle,

on dit alors que la réalisation de l'événement A est un **processus de Poisson**.

Exercice

Un standard téléphonique reçoit, en moyenne, 2 appels par minute. Les appels sont répartis au hasard dans le temps.

1. Expliquer pourquoi le fait de recevoir un appel téléphonique peut être considéré comme un processus de Poisson. Préciser le paramètre de cette loi.

2. Quelle est la loi de probabilité régissant le nombre d'appels reçus en 4 minutes ?

Calculer la probabilité pour que ce nombre d'appel dépasse 10.

Solution

1. On peut fractionner la minute T en intervalles d'une seconde Δt. Alors $n = 60$ et $\Delta t = 1$.

On admet alors que, chaque seconde, la probabilité de recevoir un appel est constante : $p = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$.

On admet aussi que, chaque seconde, il ne peut se produire au plus qu'un appel et que, d'une seconde sur l'autre, les appels sont indépendants.

Le fait de recevoir un appel est alors un processus de Poisson.

Si X désigne le nombre d'appels reçus en une minute, on peut considérer qu'à chaque seconde :

¤ le standard reçoit un appel avec la probabilité $p = \frac{1}{30}$ et qu'il n'en reçoit pas avec la probabilité $q = \frac{29}{30}$

¤ X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(60\,;\frac{1}{30}\right)$ d'espérance mathématique 2. Cette loi peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre 2.

2. Sur une période de quatre minutes, le partage en 240 secondes conduit à la loi binomiale $\mathcal{B}\left(240\,;\frac{1}{30}\right)$ d'espérance mathématique 8, ce qui permet encore une approximation par la loi de Poisson de paramètre 8.

Si Y est la variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 8, on lit dans la table que : $P(Y \geq 10) = 1 - P(Y \leq 9 \approx 0{,}283\,38$

NB : Si on utilise directement la loi binomiale $\mathcal{B}\left(240\,;\frac{1}{30}\right)$, on obtient 0,281 24