Chapitre 5
Lois continues

1. Rappel

Voir page 11 pour les rappels sur les variables à densité.

RAPPEL

Une variable X est absolument continue s'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- f est positive sur $\mathbb{R}$,
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points où elle admet une limite à droite et une limite à gauche,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$,
- La fonction de répartition F de X est liée à f par : $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

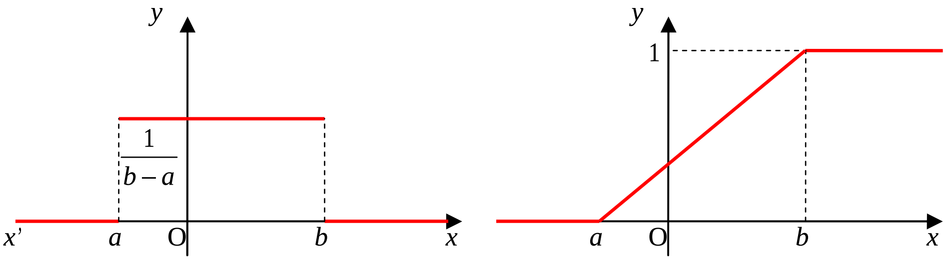
On dit que f est **une densité** de X. Abusivement, f est appelée **loi de X.**

$$P([a\,;b]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,\mathrm{d}t \qquad V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu)^2\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Loi uniforme

Une v. a. X suit la loi continue uniforme sur [a ; b] ($a \neq b$) si, et seulement si, X a pour densité de probabilité la fonction f définie par $\begin{cases} \forall x \in [\,a\,;b\,], & f(x) = \dfrac{1}{b-a} \\ \forall x \in \mathbb{R} - [\,a\,;b\,], & f(x) = 0 \end{cases}$.

Cette loi est notée $\mathcal{U}([\,a\,;\,b\,])$.



Densité de probabilité   Fonction de répartition

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Soit X et Y deux v.a. telles que Y = (b – a) X + a

X suit la loi uniforme sur [0 ; 1] si et seulement si Y suit la loi uniforme sur [a ; b].

3. Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

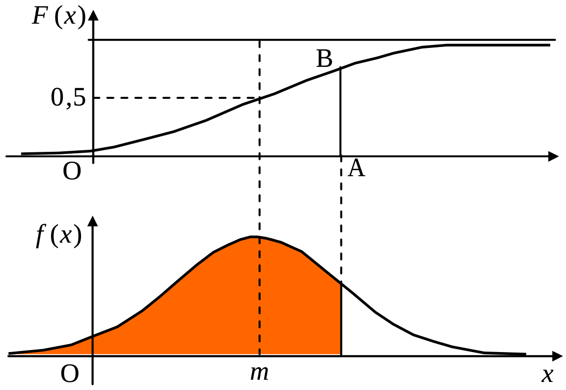
3.1. Définition et premières propriétés

Soit deux réels m et σ avec $\sigma > 0$.

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m et σ notée $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$ si et seulement si X a pour densité la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$. On a alors E(X) = m et V(X) = σ.

La courbe représentative de f est appelée « courbe en cloche ».

La figure suivante représente f et sa fonction de répartition F. La longueur du segment [AB] est égale à l'aire du domaine grisé.



3.2. Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire T suit la loi normale centrée réduite si elle suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. Sa fonction densité de probabilité, f, est alors définie par : $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$.

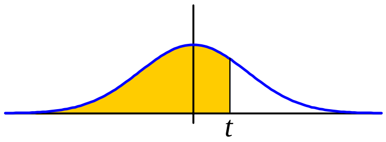
Son espérance mathématique est E(T) = 0 et sa variance V(T) = 1.

Si on note Π sa fonction de répartition, on a : $\Pi(t)=P(T<t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$

Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$ si et seulement si $\mathrm{T}=\dfrac{\mathrm{X}-m}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

3.3. Les tables de la loi normale centrée réduite

Extraits de la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ,\ 1)$.



$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\ dx$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500 0	0.504 0	0.508 0	0.512 0	0.516 0	0.519 9	0.523 9	0.527 9	0.531 9	0.535 9
0.1	0.539 8	0.543 8	0.547 8	0.551 7	0.555 7	0.559 6	0.563 6	0.567 5	0.571 4	0.575 3
0.2	0.579 3	0.583 2	0.587 1	0.591 0	0.594 8	0.598 7	0.602 6	0.606 4	0.610 3	0.614 1
0.3	0.617 9	0.621 7	0.625 5	0.629 3	0.633 1	0.636 8	0.640 6	0.644 3	0.648 0	0.651 7
0.4	0.655 4	0.659 1	0.662 8	0.666 4	0.670 0	0.673 6	0.677 2	0.680 8	0.684 4	0.687 9
0.5	0.691 5	0.695 0	0.698 5	0.701 9	0.705 4	0.708 8	0.712 3	0.715 7	0.719 0	0.722 4
0.6	0.725 7	0.729 1	0.732 4	0.735 7	0.738 9	0.742 2	0.745 4	0.748 6	0.751 7	0.754 9
0.7	0.758 0	0.761 1	0.764 2	0.767 3	0.770 4	0.773 4	0.776 4	0.779 4	0.782 3	0.785 2
0.8	0.788 1	0.791 0	0.793 9	0.796 7	0.799 5	0.802 3	0.805 1	0.807 8	0.810 6	0.813 3
0.9	0.815 9	0.818 6	0.821 2	0.823 8	0.826 4	0.828 9	0.831 5	0.834 0	0.836 5	0.838 9
1.0	0.841 3	0.843 8	0.846 1	0.848 5	0.850 8	0.853 1	0.855 4	0.857 7	0.859 9	0.862 1
1.1	0.864 3	0.866 5	0.868 6	0.870 8	0.872 9	0.874 9	0.877 0	0.879 0	0.881 0	0.883 0
1.2	0.884 9	0.886 9	0.888 8	0.890 7	0.892 5	0.894 4	0.896 2	0.898 0	0.899 7	0.901 5
1.3	0.903 2	0.904 9	0.906 6	0.908 2	0.909 9	0.911 5	0.913 1	0.914 7	0.916 2	0.917 7
1.4	0.919 2	0.920 7	0.922 2	0.923 6	0.925 1	0.926 5	0.927 9	0.929 2	0.930 6	0.931 9
1.5	0.933 2	0.934 5	0.935 7	0.937 0	0.938 2	0.939 4	0.940 6	0.941 8	0.942 9	0.944 1
1.6	0.945 2	0.946 3	0.947 4	0.948 4	0.949 5	0.950 5	0.951 5	0.952 5	0.953 5	0.954 5
1.7	0.955 4	0.956 4	0.957 3	0.958 2	0.959 1	0.959 9	0.960 8	0.961 6	0.962 5	0.963 3
1.8	0.964 1	0.964 9	0.965 6	0.966 4	0.967 1	0.967 8	0.968 6	0.969 3	0.969 9	0.970 6
1.9	0.971 3	0.971 9	0.972 6	0.973 2	0.973 8	0.974 4	0.975 0	0.975 6	0.976 1	0.976 7
2.0	0.977 2	0.977 8	0.978 3	0.978 8	0.979 3	0.979 8	0.980 3	0.980 8	0.981 2	0.981 7
2.1	0.982 1	0.982 6	0.983 0	0.983 4	0.983 8	0.984 2	0.984 6	0.985 0	0.985 4	0.985 7
2.2	0.986 1	0.986 4	0.986 8	0.987 1	0.987 5	0.987 8	0.988 1	0.988 4	0.988 7	0.989 0
2.3	0.989 3	0.989 6	0.989 8	0.990 1	0.990 4	0.990 6	0.990 9	0.991 1	0.991 3	0.991 6
2.4	0.991 8	0.992 0	0.992 2	0.992 5	0.992 7	0.992 9	0.993 1	0.993 2	0.993 4	0.993 6
2.5	0.993 8	0.994 0	0.994 1	0.994 3	0.994 5	0.994 6	0.994 8	0.994 9	0.995 1	0.995 2
2.6	0.995 3	0.995 5	0.995 6	0.995 7	0.995 9	0.996 0	0.996 1	0.996 2	0.996 3	0.996 4
2.7	0.996 5	0.996 6	0.996 7	0.996 8	0.996 9	0.997 0	0.997 1	0.997 2	0.997 3	0.997 4
2.8	0.997 4	0.997 5	0.997 6	0.997 7	0.997 7	0.997 8	0.997 9	0.997 9	0.998 0	0.998 1
2.9	0.998 1	0.998 2	0.998 2	0.998 3	0.998 4	0.998 4	0.998 5	0.998 5	0.998 6	0.998 6

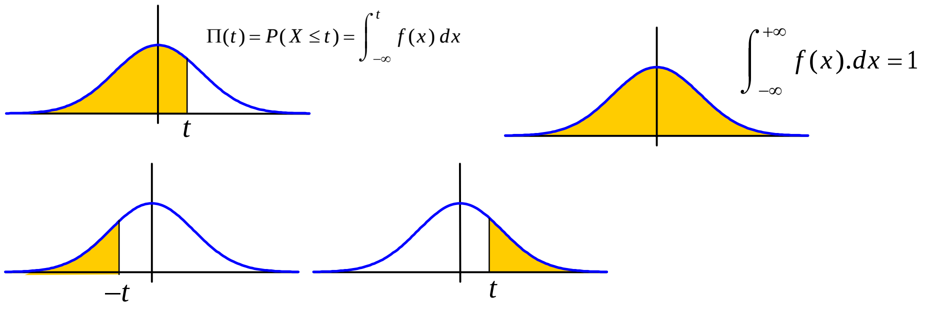
Table pour les grandes valeurs de *t* :

t	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
$\Pi(t)$	0.998 65	0.999 03	0.999 31	0.999 52	0.999 66	0.999 77	0.999 841	0.999 928	0.999 968	0.999 997

Ces tables sont construites uniquement pour t positif, mais les deux propriétés graphiques suivantes :

- ¤ la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- ¤ l'aire de la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1

permettent d'effectuer les calculs dans tous les cas.



$$\Pi(-t) = \mathrm{P}(X > t) = 1 - \Pi(t)$$

Quelques résultats importants :

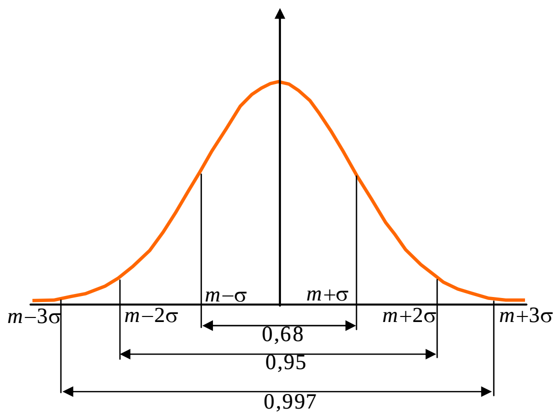
$\forall t_1 \in \mathbb{R}, \forall t_2 \in \mathbb{R}$, avec $t_1 < t_2$,	$\mathrm{P}(t_1 \le \mathrm{T} \le t_2) = \Pi(t_2) - \Pi(t_1)$
$\forall t \in \mathbb{R}$,	$\mathrm{P}(\mathrm{T} > t) = 1 - \Pi(t)$
$\forall t \in [\,0\,;+\infty\,[$	$\mathrm{P}(T \le -t) = 1 - \Pi(t)$
$\forall t \in [\,0\,;+\infty\,]$	$\mathrm{P}(-t \le T \le t) = 2\Pi(t) - 1$

Cette dernière relation est souvent utilisée.

Il convient de retenir deux valeurs importantes :

$$\mathrm{P}(-1{,}96 \le T \le 1{,}96) = 0{,}95$$
$$\mathrm{P}(-2{,}58 \le T \le 2{,}58) = 0{,}99$$

Plus généralement on a :



3.4. Quelques exercices d'application

Exercice 1

Une usine fabrique en grande série un certain type de pièces cylindriques. On appelle X la v.a. qui, à chaque pièce tirée au hasard, associe sa longueur et Y la v.a. qui associe son diamètre.

On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent des lois normales de moyennes respectives $\bar{x}$ = 8,55 cm et $\bar{y}$ = 5,20 cm et d'écarts types respectifs σ_x = 0,05 cm et σ_y = 0,05 cm.

1. Déterminer, à 10^{-3} près les probabilités $P(8{,}45 < X < 8{,}70)$ et $P(5{,}07 < Y < 5{,}33$.
2. Une pièce est conforme si : $8{,}45 < X < 8{,}70$ et $5{,}07 < Y < 5{,}33$.
   a. Calculer le pourcentage de pièces non conformes à la sortie de la chaîne.
   b. Les machines nécessitent-elles un réglage, sachant que le pourcentage de pièces non conformes ne peut dépasser 1 % ?

Solution

X suit la loi normale $\mathcal{N}(8{,}55 ; 0{,}05)$. Donc la v.a. T, définie par $T = \dfrac{X-8{,}55}{0{,}05}$, suit la loi normale centrée réduite.

$8{,}45 \le X \le 8{,}70$ équivaut à $\dfrac{8{,}45-8{,}55}{0{,}05} \le T \le \dfrac{8{,}70-8{,}55}{0{,}05}$, donc à $-2 \le T \le 3$.

La probabilité cherchée est donc $\Pi(3) - \Pi(-2)$. Or $\Pi(-2) = 1 - \Pi(2)$. Donc :

$P(8{,}45 \le X \le 8{,}70) = \Pi(2) + \Pi(3) - 1 = 0{,}976$

De même, pour calculer $P(5{,}07 \le Y \le 5{,}33)$, on utilise la variable normale centrée réduite $T' = \dfrac{Y-5{,}20}{0{,}05}$.

$5{,}07 \le Y \le 5{,}33$ équivaut à $\dfrac{5{,}07-5{,}20}{0{,}05} \le T' \le \dfrac{5{,}33-5{,}20}{0{,}05}$, donc à $-2{,}6 \le T' \le 2{,}6$.

$P(5{,}07 \le Y \le 5{,}33) = 2\,\Pi(2{,}6) - 1 = 0{,}991$

2. a. Soit D l'événement « la pièce n'est pas conforme ».

D = $(8{,}45 \le X \le 8{,}70)$ **et** $(5{,}07 \le Y \le 5{,}33)$

Or les v.a. X et Y sont indépendantes.

Donc $P(D) = P(8{,}45 \le X \le 8{,}70) \times P(5{,}07 \le Y \le 5{,}33) = 0{,}967$

Par suite la probabilité qu'une pièce ne soit pas conforme est $1 - 0{,}967 = 0{,}033$

Cette probabilité est supérieure à 1 %.

Il faut régler les machines...

Exercice 2

Une entreprise spécialisée dans la production de matériel optique fabrique des lentilles en grande série. On a mesuré la vergence x, exprimée en dioptries, de 1 000 lentilles du même type et on a obtenu la série statistique des mesures x_i suivantes avec les effectifs n_i correspondants.

x_i	1,975	1,980	1,985	1,990	1,995	2,000
n_i	8	27	67	118	176	200
x_i	2,005	2,010	2,015	2,020	2,025	
n_i	180	122	64	28	10	

1. Donner la moyenne $\bar{x}$ ainsi que l'écart type σ de cette série.
Représenter cette série à l'aide d'un diagramme en bâtons.

2. À chaque lentille de la production, on associe sa vergence x, exprimée en dioptries. On définit ainsi une v.a. X. L'allure du diagramme précédent amène à considérer que X suit la loi normale $\mathcal{N}(2\,;0{,}01)$. Une lentille est déclarée acceptable lorsque $1{,}98 < x < 2{,}02$. Elle est déclarée défectueuse dans le cas contraire.

Calculer la probabilité pour qu'une lentille de la production soit défectueuse.

3. Un réglage de machine permet de modifier l'écart type sans changer la moyenne. Dans cette question X suit donc une loi normale N(2 ; σ')

Déterminer σ' pour que la probabilité d'obtenir d'obtenir une lentille défectueuse soit inférieure ou égale à 0,01.

Solution

1. Les résultats arrondis au centième sont $\bar{x} = 2{,}00$ et $\sigma = 0{,}01$

2. On admet que X suit la loi normale N(2 ; 0,01). Une lentille est déclarée acceptable si l'événement $1{,}98 \le X \le 2{,}02$ est réalisé.

La v.a. T définie par $T = \dfrac{X-2}{0{,}01}$ suit la loi normale centrée réduite.

$1{,}98 \le X \le 2{,}02$ équivaut à $-2 \le T \le 2$. On sait que $P(-2 \le T \le 2) = 2\,\Pi(2) - 1$.

La table donne $\Pi(2) = 0{,}977\,2$. Donc $P(1{,}98 \le X \le 2{,}02) = 0{,}954\,4$

La probabilité pour qu'une lentille soit défectueuse est $1 - 0{,}954\,4$ soit, au centième le plus proche, 0,05.

3. Si X suit la loi normale N(2 ; σ') alors la variable T définie par $T = \dfrac{X-2}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite.

On veut que la probabilité d'obtenir une lentille défectueuse soit inférieure ou égale à 0,01, donc que la probabilité d'obtenir une lentille acceptable soit strictement supérieure à 0,99 : $P(1{,}98 \le X \le 2{,}02) > 0{,}99$.

Cette inégalité s'écrit :

$$P(|X-2| \le 0{,}02) > 0{,}99, \text{ soit } P\left(|T| \le \frac{0{,}02}{\sigma'}\right) > 0{,}99$$

On en déduit que $2\Pi\left(\dfrac{0{,}02}{\sigma'}\right) - 1 > 0{,}99$ soit $\Pi\left(\dfrac{0{,}02}{\sigma'}\right) > 0{,}995$.

La table de la loi normale centrée réduite donne $\Pi(2{,}575) = 0{,}995$.

Alors $\dfrac{0{,}02}{\sigma'} = 2{,}575$, soit $\sigma' = 0{,}00776\ldots$ $\boxed{\text{Au millième le plus proche, } \sigma' = 0{,}008}$.

d'après BTS Génie Optique