Exercices de L spécialité

A. Exercices d'arithmétique et d'analyse

Exercice 1 : numéro ISSN

Toutes les publications en série, comme les journaux et les périodiques, sont identifiés par un numéro ISSN (International Standard Serial Number). En France, ce numéro est attribué par le Centre national d'enregistrement des publications en série.

L'ISSN est constitué des caractères « ISSN » suivis de deux groupes de quatre caractères, ces groupes étant séparés par un tiret. Les 7 premiers caractères sont des chiffres qui caractérisent la publication. Le dernier caractère, situé en 8e position, sert de clé de contrôle et est pris dans la liste : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X (qui représente le nombre 10).

Pour déterminer la clé d'un numéro ISSN dont les sept premiers chiffres sont abcdefg, on calcule le nombre $N = 8a + 7b + 6c + 5d + 4e + 3f + 2g$, puis on détermine le reste r de la division euclidienne de N par 11. La clé de contrôle est alors déterminée à partir de r à l'aide du tableau de correspondance suivant :

r	0	1	2	3	4	5
clé	0	X	9	8	7	6

r	6	7	8	9	10	
clé	5	4	3	2	1	

Par exemple, l'ISSN 0999-2138 est associé au titre-clé « Ouest-France Rennes ». Refaisons le calcul de la clé de contrôle.

Dans ce cas,

$N = 8\times 0 + 7\times 9 + 6\times 9 + 5\times 9 + 4\times 2 + 3\times 1 + 2\times 3 = 179$.

Or $179 = 11\times 16 + 3$. D'où r = 3.

La clé vaut donc 8.

Le dernier caractère est bien le chiffre 8.

1. Combien peut-on référencer de journaux ou périodiques avec ce système ?

2. a. Compléter par sa clé de contrôle, représentée par □, le numéro ISSN 1032-105□.

   b. Vérifier que le numéro ISSN 0385-210□ a la même clé que le précédent.

3. Le troisième chiffre du numéro ISSN d'un journal est illisible. On le note c. Le numéro se présente sous la forme ISSN 24c6-3014.

   a. Montrer que : $88 + 6c \equiv 7 \ (11)$.

   b. Quel est le chiffre c ?

4. Une erreur fréquente lorsqu'on saisit les sept premiers chiffres d'un numéro ISSN est de permuter deux chiffres qui se suivent, on tape par exemple acbdefg au lieu de abcdefg. Cette erreur est-elle détectée par la clé de contrôle ?

Exercice 2 : Les palindromes

Un palindrome est un nombre qui peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche en gardant la même valeur. Par exemple, 34543 est un palindrome dans le système de numération décimale.

1. Le nombre 3773 est un palindrome. Quelle est son écriture en base 5 ? Est-ce un palindrome en base cinq ?

2. a. Le nombre $(\overline{2002})_{\text{cinq}}$ est un palindrome en base cinq. Est-ce un palindrome dans le système de numération décimale ?

   b. Tous les nombres de quatre chiffres qui sont des palindromes en base cinq sont-ils des palindromes dans le système de numération décimale ?

3. On considère un palindrome de quatre chiffres dans le système de numération décimale. Il s'écrit $\overline{abba}$. Étudier la divisibilité par 11 de ce palindrome (on pourra utiliser la congruence modulo 11).

Exercice 3 : L'âge du capitaine

Le capitaine a fait naufrage. Tout ce que l'on a retrouvé sur lui est sa carte de sécurité sociale.

On parvient à déchiffrer son numéro INSEE, sauf le deuxième chiffre a et le troisième chiffre b qui sont illisibles : 1 a b 12 71 153 044 Clé 67

Les deux chiffres a et b qui manquent sont, dans cet ordre, les deux derniers chiffres de l'année de naissance du capitaine. On se propose d'utiliser la clé du numéro INSEE pour retrouver cette année de naissance.

1. a. La clé K d'un numéro INSEE est calculée de la manière suivante : $K = 97 - r$ où r est le reste de la division euclidienne par 97 de l'entier N constitué par les 13 chiffres du numéro INSEE.

Démontrer que la clé K d'un numéro INSEE est telle que $N + K$ est divisible par 97.

   b. Déduire de la question précédente que, pour le numéro INSEE du capitaine, on a : $N \equiv 30 \ (97)$.

2. On pose $\overline{1\,a\,b\,1\,2\,7\,1\,1\,5\,3\,0\,4\,4} = \overline{1\,a\,b} \times 10^{10} + A$, où A est un entier naturel.

   a. Préciser l'entier A et calculer le reste de la division euclidienne de A par 97.

   b. Justifier la congruence suivante : $10^2 \equiv 3 \ (97)$.

   c. En déduire que l'on a : $10^{10} \equiv 49 \ (97)$.

3. a. Déduire des résultats établis aux questions 1. et 2. que l'on a : $\overline{1\,a\,b} \times 49 \equiv 73 \ (97)$.

   b. Vérifier que l'on a : $49 \times 2 \equiv 1 \ (97)$.

Déterminer alors l'année de naissance du capitaine.

Exercice 4 : Des suites

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $\frac{3}{11}$.

1. Calculer, sous forme de fractions irréductibles, u_1, u_2 et u_3.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Donner l'écriture fractionnaire et l'écriture décimale illimitée de u_{36}.

4. Soit $S = 0{,}5454\overline{54}\ldots$, on considère la suite de nombres (a_n) définie de la manière suivante : $a_1 = 0{,}54$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $a_{n+1} = 10^{-2}a_n$.

   a. Déterminer la nature de la suite (a_n).

   b. Calculer $a_1 + a_2 + a_3$.

   c. On appelle S_n la somme $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_n = \frac{54}{99}\left[1 - (10^{-2})^n\right]$.

   d. En déduire la limite de la somme S_n et deux entiers p et q tels que $S = \frac{p}{q}$.

5. S est-il un terme de la suite (u_n) définie précédemment ? Si oui, quel est son rang dans la suite ?

Exercice 5 : Analyse et suites

Dans cet exercice, sont envisagées deux manières différentes de démontrer la propriété suivante :

Pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

Première méthode

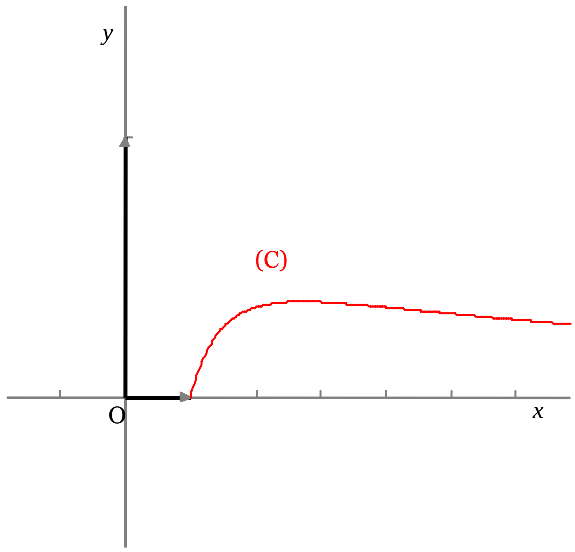
1. Soit f la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. La courbe (C) ci-dessous est celle de la fonction f ?

2. a. Après avoir calculé $f'(x)$, préciser les variations de f sur $[1;+\infty[$.

   b. En déduire que pour tout entier $n \geq 4$, $\frac{\ln n}{n} \leqslant \frac{\ln 4}{4}$.

   c. Montrer que $f(2) = f(4)$.

   d. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.



Deuxième méthode

1. Vérifier que pour tout entier n, $2n^2 - (n+1)^2 = (n-1)^2 - 2$.

2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 4$, $2n^2 \geq (n+1)^2$.

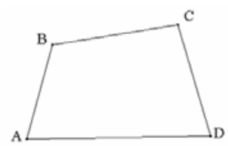
3. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geqslant n^2$.

Exercice 6 : raisonnement par récurrence

On cherche s'il est possible de trouver une formule permettant de déterminer le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés, pour $n \geq 4$ .On note d_n le nombre cherché.

a. Dans cette question $n = 4$.

Tracer les diagonales du quadrilatère ABCD et en déduire d_4.

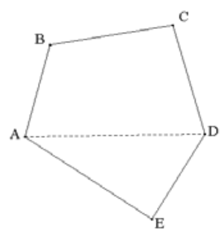


b. Dans cette question $n = 5$.

Le pentagone ABCDE a été obtenu par adjonction d'un cinquième point au quadrilatère ABCD.

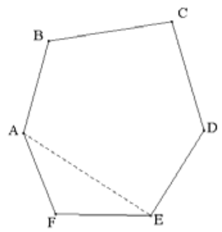
Tracer les diagonales de pentagone ABCDE.

Expliquer pourquoi $d_5 = d_4 + 3$.



c. Dans cette question $n = 6$.

Expliquer pourquoi $d_6 = d_5 + 4$.



d. Généraliser la méthode pour prouver que pour tout $n \geq 4$,

$d_{n+1} = d_n + n - 1$.

e. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que,

pour tout $n \geq 4$, $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

B. Algorithmes

Exercice 1

Partie 1

On admet que, pour tout nombre réel ¬, il existe un unique entier relatif n tel que �≤ ¬ ◁ � −1.

Par définition, � est l'image de ¬ par la fonction partie entière. On note E (¬) = �.

1. Quelle est la partie entière de 3,72 ?

2. Quelle est la partie entière d'un nombre entier ? Énoncer la conclusion sous la forme d'une proposition vraie, explicitement quantifiée et comprenant une implication.

3. Donner un énoncé de la réciproque. Cette nouvelle proposition est-elle vraie ?

4. � est un entier naturel quelconque. A l'aide de la fonction partie entière, donner une condition nécessaire et suffisante pour que 3 divise �.

Partie 2

On considère l'algorithme suivant :

Entrée : � un entier naturel

Traitement et sortie :

Si $\frac{n}{11} = E\left(\frac{n}{11}\right)$ alors afficher « oui »

sinon afficher « non »

1. Faire fonctionner cet algorithme pour □ = 35, □ = 44, □ = 120.

2. Caractériser les nombres entiers naturels qu'il faut mettre en entrée pour obtenir comme sortie « oui »

Partie 3

On veut automatiser l'étude de la divisibilité par 23 d'un entier naturel. Écrire, en langage naturel, un algorithme qui donne comme sortie « OUI » si, et seulement si, a été mis en entrée un entier naturel □ divisible par 23, et comme sortie « NON » dans le cas contraire.

Partie 4

1. Quel résultat l'algorithme de la partie 2 donne t-il en sortie lorsque l'entier naturel mis en entrée est 2 783 ?

2. Quel résultat l'algorithme de la partie 3 donne t-il en sortie lorsque l'entier naturel mis en entrée est 2 783 ?

3. Trouver un entier naturel strictement inférieur à 2 783 pour lequel ces deux algorithmes donnent en sortie « OUI ».

Exercice 2

Partie 1

1. On considère l'algorithme n°1 suivant :

Entrée : n un entier naturel

Initialisation : donner à u la valeur initiale n

Traitement :

Tant que u ≥ 11, affecter à u la valeur u − 11

Sortie : afficher u

a. Faire fonctionner cet algorithme pour n = 35, n = 50, n = 55.

b. Pour un entier naturel n quelconque, quel est le nombre entier naturel fournit par cet algorithme ?

2. On considère l'algorithme n°2 suivant :

Entrée : a élément de {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

b élément de {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Traitement :

Affecter à u la valeur $a + 10b$

Affecter à v la valeur $b + 10a$

Affecter à m la valeur $v + 100u$

Sortie : afficher m

a. Faire fonctionner cet algorithme pour $a = 1$ et $b = 2$, $a = 2$ et $b = 1$, $a = 5$ et $b = 5$.

b. Écrire en base 10 le nombre m donné en sortie par cet algorithme pour deux nombres a et b quelconques mis en entrée dans cet ordre.

3. À partir de deux nombres a et b quelconques, éléments de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, l'algorithme n°2 donne en sortie un nombre m. On donne ce nombre m comme entrée à l'algorithme n°1. On obtient toujours 0 comme résultat. Pourquoi ?

Partie 2

1. Écrire en langage naturel un algorithme qui, avec pour entrées a et b, donne comme sortie l'entier naturel dont l'écriture en base 3 est $\overline{baab}^3$

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

Affirmation n°1 : pour tous nombres a et b éléments de {0, 1, 2}, le nombre $\overline{baab}^3$ est divisible par 11.

Affirmation n°2 : il existe deux nombres a et b éléments de {0, 1, 2} tels que le nombre $\overline{baab}^3$ est divisible par 11.

Affirmation n°3 : pour tous nombres a et b éléments de {0, 1, 2}, le nombre $\overline{baab}^3$ est divisible par 4.

Affirmation n°4 : il existe deux nombres a et b éléments de {0, 1, 2} tels que le nombre $\overline{baab}^3$ est divisible par 4.

Géométrie

Exercice 1

Une des épreuves proposées aux candidats pour un emploi dans un cabinet d'architecture avait l'intitulé suivant : « Représenter en perspective centrale (à point de fuite), le carrelage 4 carreaux par 4 carreaux proposé. »

Les dessins des quatre candidats, numérotés de 1 à 4, sont reproduits ci-dessous.

Les appréciations qui leur ont été attribuées par le jury sont, dans le désordre, les phrases a, b, c et d ci-dessous :

a. Il y a plusieurs points de fuite pour cinq parallèles, c'est trop!

b. Bien!

c. On demandait un dessin en perspective centrale.

d. Erreur: le centre du carrelage est mal placé.

1. En complétant au besoin les dessins des candidats par des traits de construction, associer à chacun d'eux (dessins n° 1, 2, 3 et 4), l'appréciation (a, b, c ou d) qui lui correspond.

Justifier brièvement les choix faits.

2. En tenant compte des réponses précédentes, compléter la figure n°5

- par un carrelage 2×2 sur chaque face verticale visible.
- par un carrelage 3× 3 sur la face supérieure (le toit).

On laissera apparents les traits de construction.

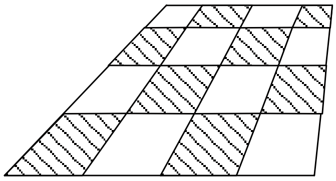


figure 1

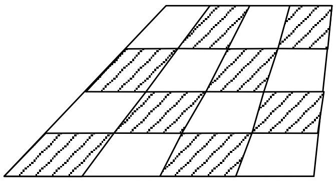


figure 2

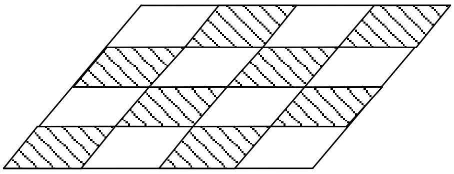


figure 3

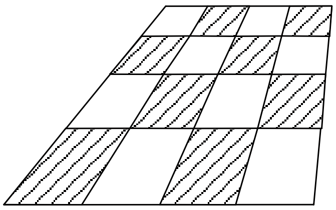


figure 4

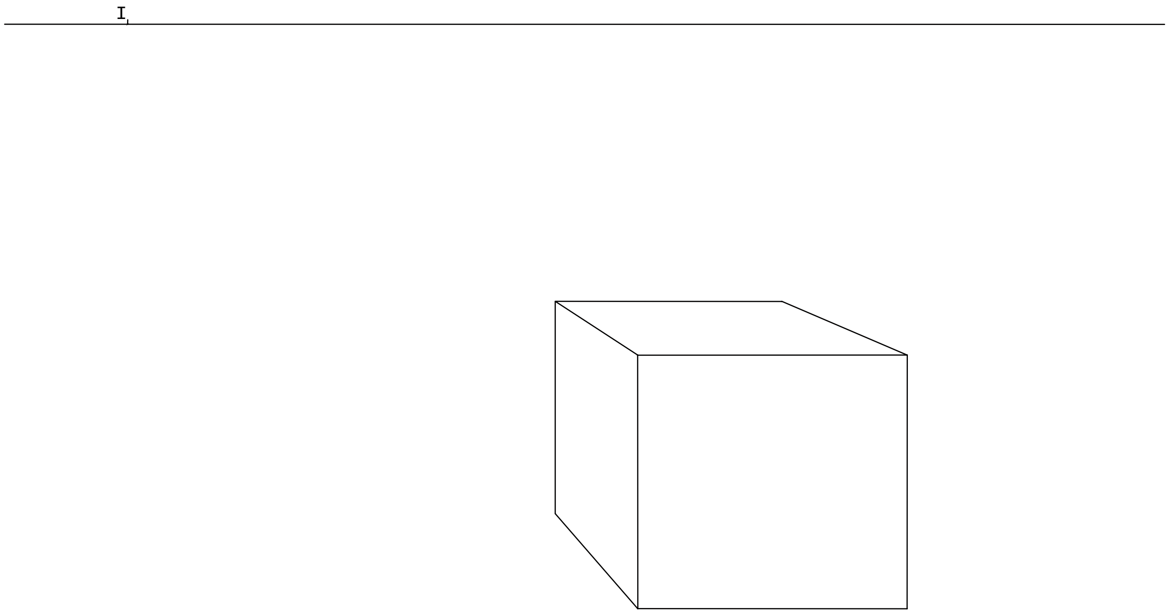


figure 5

Exercice 2

Le dessin n°1 ci-contre représente, en perspective parallèle, l'intérieur d'une salle dont la largeur, la longueur et la hauteur ont même mesure *h*

Le sol ABCD de cette salle est constitué de neuf dalles carrées de dimension identique.

Au centre O de cette salle est placé un lampadaire dont la hauteur mesure les deux tiers de *h*.

Sur le dessin n)2 cette salle est représentée en perspective centrale. Les points a, b , c , d , m et m' représentent respectivement A, B, C, D, M et M'.

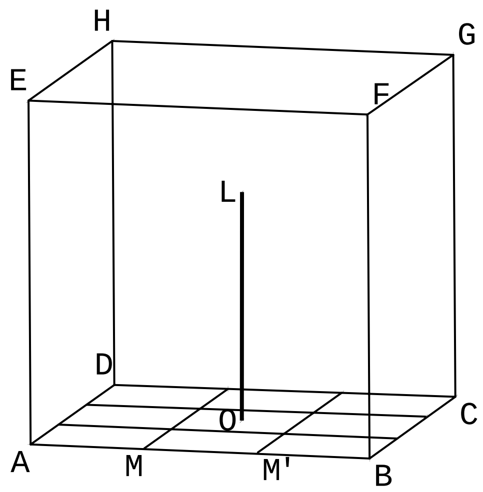
1°) Construire la ligne d'horizon.

Construire les représentations dans cette perspective centrale des droites parallèles à (BD) passant respectivement par M et M'.

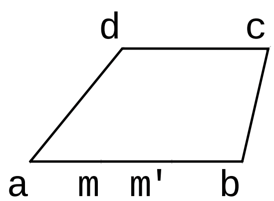
Construire la représentation des neuf dalles qui recouvrent le sol de la salle.

2°) Construire le point o qui représente le point O.

Construire le point *l* qui représente le sommet L du lampadaire.



dessin n°1



dessin n°2

Exercice 3 :

Une tente canadienne est représentée en perspective parallèle sur le dessin ci-contre.

Sur ce dessin ABCD représente le sol de la tente qui est un carré. Le triangle ABE, rectangle isocèle, représente l'entrée de la tente qui est située dans un plan frontal.

Sur la figure 2, le sol de la tente est représenté en perspective centrale par le quadrilatère abcd. Les segments [ab] et [cd] sont parallèles.

1. a. Placer sur la figure 2 le point de fuite principal ω.
   b. En déduire le tracé de la ligne d'horizon.
   c. Placer les points de distance d_1 et d_2.
2. Achever le tracé de la représentation de la tente.
3. Une tente de même forme mais plus grande s'installe à côté, parallèlement à la première. Achever la représentation a'b'c'd'e'f' de cette deuxième tente.

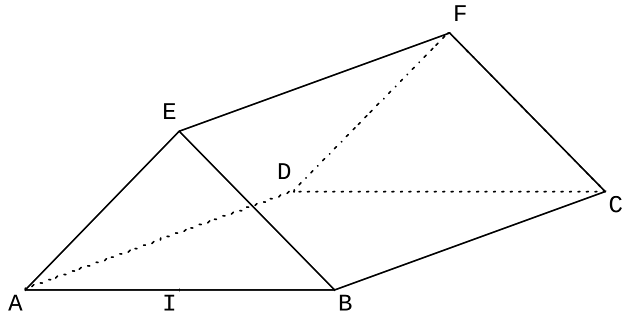


figure 1

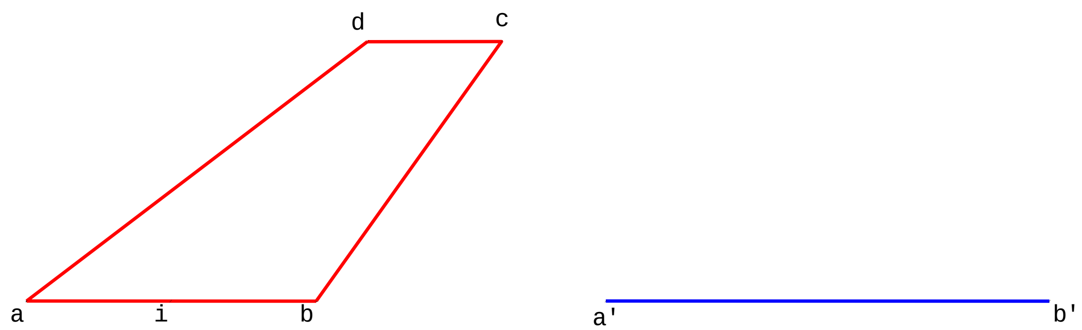


figure 2 - Perspective centrale

Exercice 4

On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $EFGHIJKL$, de même taille, posés sur le sol. Le cube $EFGHIJKL$ est placé derrière le cube $ABCDEFGH$.

La face $ABCD$ est dans le plan frontal.

1. Sur la figure 1, terminer la représentation des deux cubes en perspective parallèle.

2. Sur la figure 2 on a représenté en perspective centrale les sommets A B C D et E et la ligne d'horizon (h).
   a. Placer le point de fuite principal.
   b. Placer les deux points de distance.
   c. Terminer la représentation du cube *ABCDEFGH*.
   d. Représenter le cube *EFGHIJKL* et proposer un élément de contrôle.

3 Citer deux propriétés conservées par la perspective cavalière qui ne le sont pas par la perspective centrale.

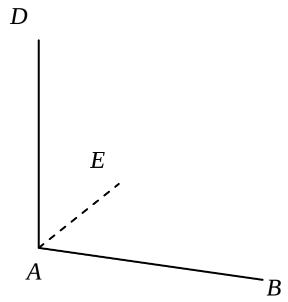


figure 1

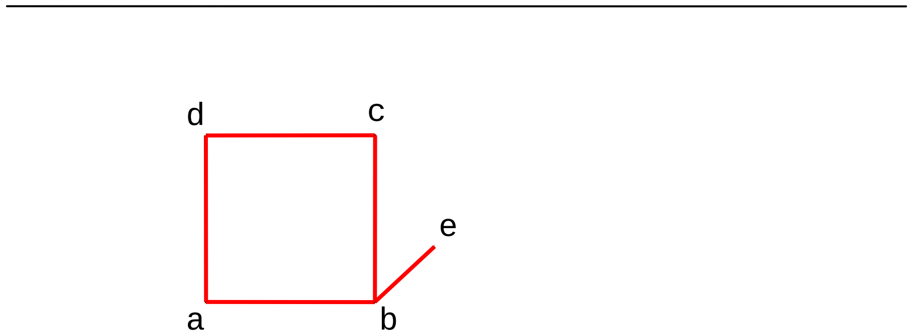


figure 2

Exercice 5

1. Compléter la figure ci-jointe, en respectant l'algorithme de construction suivant :
   Tracer les droites (AC) et (BD)
   Tant que la distance CD est supérieure à 1 cm,
      construire le milieu I du segment [CD]
      tracer le point E d'intersection des droites (AC) et (BI)
      tracer le point F d'intersection des droites (BD) et (AI)
      remplacer A par C, C par E, B par D et D par F.

2. Un observateur est sur une route bordée de poteaux régulièrement espacés et de même hauteur.

Les poteaux situés sur le côté gauche de la route viennent d'être représentés en perspective centrale.

Représenter le bord droit de la route et les poteaux faisant face à ceux qui ont déjà été tracés.

3. En supposant que la route mesure 6 mètres de large, estimer :
   - la hauteur des poteaux
   - la taille de l'observateur
   - la distance qui le sépare du côté droit de la route.