Arithmétique

Contenus	Modalités	Commentaires
Écriture des entiers naturels Éclairage historique	Il s'agit de : – présenter un système de numération additive (par exemple : numération égyptienne, romaine, grecque) ; – comparer ses propriétés avec celle de notre numération écrite ; – montrer aux élèves que la création du système décimal de position a été longue et que l'invention du zéro en a constitué une étape décisive.	Cette présentation permet aux élèves de comprendre les règles qui président à l'écriture de ces nombres et de différencier nombre et chiffre ; elle devra se cantonner un niveau modeste : il s'agit uniquement d'un aborder les principes. Le fait de présenter des algorithmes de calcul dans l'un de ces systèmes permet de montrer les limites de tels systèmes de numération et justifie l'utilisation des abaques ou bouliers.
Écriture des entiers naturels dans le système décimal de position et dans des bases autres que dix.	Il s'agit, *sur des exemples*, d'écrire un nombre donné en base dix dans une autre base et inversement, et d'effectuer une addition dans une base autre que dix.	L'algorithme permettant d'obtenir l'écriture du nombre d'éléments d'une collection dans une base donnée doit être explicité. Exemples: base deux, base seize (code ASCII).
Justification des critères de divisibilité par 2 , 3, 4, 5 et 9 en base dix.		C'est l'occasion de faire remarquer aux élèves, *sur un ou deux exemples*, que ces critères sont dépendants de la base de numération.
Entiers naturels et nombres premiers Résolution de problèmes simples.	Il s'agit de faire en sorte qu'au cours de situations de recherche, les élèves : – d'une part, mobilisent leurs connaissances antérieures d'arithmétique (multiples, diviseurs, nombres premiers, décomposition en produit de facteurs premiers, pgcd...) ; – d'autre part, soient amenés à identifier une proposition, une quantification (explicite ou implicite), à se prononcer sur la véracité d'une proposition, à imaginer un contre-exemple et à produire eux-mêmes des propositions dans le contexte du problème étudié.	C'est l'occasion d'une part de faire le point sur les connaissances enseignées au collège et en seconde, d'autre part d'améliorer les compétences des élèves en argumentation mathématique et en analyse de raisonnement. On justifiera sur des exemples le principe de l'algorithme d'Euclide pour la recherche du pgcd, et on en réalisera la programmation sur calculatrice ou tableur.

Contenus	Modalités	Commentaires
Démonstration du théorème : « l'ensemble des nombres premiers est infini ».		C'est un exemple de démonstration par l'absurde.
Diviseurs d'un entier naturel, diviseurs communs à des entiers naturels.	Écrire tous les diviseurs d'un nombre entier et les dénombrer, notamment à partir de sa décomposition en nombres premiers. Trouver le nombre et l'ensemble des diviseurs communs à deux nombres entiers.	La construction d'un arbre de tous les diviseurs de l'entier est importante pour son lien avec les problèmes de dénombrement. Son principe peut être étendu, à partir de cas simples, à des cas où le nombre à traiter est « grand », c'est-à-dire qu'il ne permet pas la réalisation complète du schéma.
L'ensemble des diviseurs communs à plusieurs entiers est de l'ensemble des diviseurs de leur pgcd.	La méthode empirique (par intersection, en lien avec le connecteur « et ») conduit à conjecturer, puis à démontrer, le théorème, ce qui permet ensuite d'utiliser celui-ci.	
Définition de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.	Pour a entier naturel et b entier naturel non nul, on admet l'existence et l'unicité des entiers naturels q et r tels que $a = b\,q + r$ et 0 ; $r < b$.	Il s'agit : – de faire le lien entre une opération connue des élèves depuis longtemps et une définition formalisée, sous la forme d'une proposition quantifiée existentiellement ; – d'écrire un algorithme de division euclidienne de deux naturels et de le mettre en œuvre sur calculatrice ou tableur.
Multiples d'un entier naturel dans Z	On complète la liste des multiples d'un naturel n dans $\mathbb{N}$ par celle de leurs opposés	
Congruence dans $\mathbb{Z}$	Pour a et b entiers relatifs, et n entier naturel non nul, $a \equiv b$ (n) si et seulement si $a - b$ est un multiple de n dans $\mathbb{Z}$.	Pour a et b entiers naturels, l'équivalence de cette définition avec : « a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n » sera démontrée. C'est l'occasion de travailler sur la double implication et d'utiliser un énoncé existentiel dans une preuve. Les preuves peuvent s'appuyer sur des exemples génériques.
Compatibilité avec l'addition et la multiplication.	Ces propriétés sont à démontrer.	
Applications : – aux clefs de contrôle, – aux problèmes de divisibilité, et entre autres aux critères de divisibilité par 3, 4, 9, 11	Les exemples peuvent, entre autres, être choisis parmi les suivants :Numéro INSEE, numéro ISBN, code à barres, code bancaire, « preuve » par 9.	Comparer, pour certains problèmes, différents types de résolution, comme par exemple l'utilisation de raisonnements : – par disjonction des cas, – par récurrence, – à l'aide de congruences.
Initiation au raisonnement par récurrence: propriété héréditaire; principe de récurrence	Ce type de raisonnement est mis en place à partir d'exemples. Le principe de récurrence est une propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ qui est admise.	Se garder de tout excès de technicité.