

Remboursement d'emprunts

Programmes de terminale : information chiffrée et suites numériques/suites numériques/sommes de termes consécutifs – page 2

Les différentes activités proposées dans le document d'accompagnement au sujet des remboursements d'emprunts sont des activités accompagnées, au cours desquelles le vocabulaire (service d'emprunt, amortissement, annuité...) est rencontré et les différentes propriétés (suite des annuités ou suite des amortissements) sont mises en évidence (mais pas nécessairement démontrées). Ici encore le vocabulaire n'est pas exigible. L'élève sera suffisamment familier avec un tableau de remboursement pour savoir le compléter dans un exercice d'évaluation par exemple.

Un capital D_0 est emprunté au taux t sur une période de n années.

- **l'amortissement** de l'année k est le remboursement A_k de capital effectué l'année k .
- **l'annuité** de l'année k est le paiement a_k effectué l'année k : c'est la somme de l'amortissement de l'année k et des intérêts de l'année k .
- Le service de l'emprunt est le tableau détaillé des intérêts et des amortissements à payer.

Deux modes de remboursement : le remboursement à **amortissements constants** et le remboursement à **annuités constantes**.

Remboursement à amortissements constants

Année	Dette en début d'année	Intérêts de l'année	Amortissement de l'année $\frac{D_0}{n}$	Annuité	Dette en fin d'année
1	D_0	$D_0 \times t$	$A_1 = \frac{D_0}{n}$	$a_1 = D_0 \times t + A_1$	$D_1 = D_0 - A_1$
2	D_1	$D_1 \times t$	$A_2 = \frac{D_0}{n}$	$a_2 = D_1 \times t + A_2$	$D_2 = D_1 - A_2$
...
k	D_{k-1}	$D_{k-1} \times t$	$A_k = \frac{D_0}{n}$	$a_k = D_{k-1} \times t + A_k$	$D_k = D_{k-1} - A_k$
$k+1$	D_k	$D_k \times t$	$A_{k+1} = \frac{D_0}{n}$	$a_{k+1} = D_k \times t + A_{k+1}$	$D_{k+1} = D_k - A_{k+1}$
...
$n-1$	D_{n-2}	$D_{n-2} \times t$	$A_{n-1} = \frac{D_0}{n}$	$a_{n-1} = D_{n-2} \times t + A_{n-1}$	$D_{n-1} = D_{n-2} - A_{n-1}$
n	D_{n-1}	$D_{n-1} \times t$	$A_n = \frac{D_0}{n}$	$a_n = D_{n-1} \times t + A_n$	$D_n = D_{n-1} - A_n$ $D_n = 0$

On a : $a_{k+1} - a_k = (D_k - D_{k-1}) \times t$ car $A_{k+1} = A_k = \frac{D_0}{n}$; or $D_{k+1} = D_k - A_{k+1}$ donc $D_k - D_{k+1} = -\frac{D_0}{n}$

Donc : $a_{k+1} - a_k = -t \times \frac{D_0}{n}$.

La suite des annuités est donc arithmétique de premier terme $D_0 \left(t + \frac{1}{n} \right)$ et de raison $-t \times \frac{D_0}{n}$.

Remboursement à annuités constantes

Année	Dettes en début d'année	Intérêts de l'année	Amortissement de l'année	Annuité a	Dettes en fin d'année
1	D_0	$D_0 \times t$	$A_1 = a - D_0 \times t$	$D_0 \times t + A_1$	$D_1 = D_0 - A_1$
2	D_1	$D_1 \times t$	$A_2 = a - D_1 \times t$	$D_1 \times t + A_2$	$D_2 = D_1 - A_2$
...
k	D_{k-1}	$D_{k-1} \times t$	$A_k = a - D_{k-1} \times t$	$D_{k-1} \times t + A_k$	$D_k = D_{k-1} - A_k$
$k+1$	D_k	$D_k \times t$	$A_{k+1} = a - D_k \times t$	$D_k \times t + A_{k+1}$	$D_{k+1} = D_k - A_{k+1}$
...
$n-1$	D_{n-2}	$D_{n-2} \times t$	$A_{n-1} = a - D_{n-2} \times t$	$D_{n-2} \times t + A_{n-1}$	$D_{n-1} = D_{n-2} - A_{n-1}$
n	D_{n-1}	$D_{n-1} \times t$	$A_n = a - D_{n-1} \times t$	$D_{n-1} \times t + A_n$	$D_n = D_{n-1} - A_n$ $D_n = 0$

On a : $D_k \times t + A_{k+1} = D_{k-1} \times t + A_k$ donc $A_{k+1} = (D_{k-1} - D_k) \times t + A_k$.

Or $D_{k-1} - D_k$ représente la différence entre la dette de l'année $k - 1$ et la dette de l'année k : donc : $D_{k-1} - D_k = A_k$.

Alors $A_{k+1} = A_k \times t + A_k$ soit $A_{k+1} = (1 + t) \times A_k$.

La suite des amortissements est donc géométrique de raison $1 + t$.

Calcul du montant a de l'annuité en fonction de D_0, t et n : $D_0 = a \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$ d'où $a = D_0 \frac{t}{1 - (1+t)^{-n}}$

Avec les élèves :

On emprunte une somme de 11 000 € sur une durée de 10 ans au taux de 4 %.

1. On rembourse des annuités de 1 000 € pendant les 9 premières années.
À l'aide du tableur, déterminer le montant de la 10^{ième} annuité (la feuille de calcul doit permettre le changement de capital, le changement de taux et le changement de l'annuité pour les 9 premières années).
2. Étudier la variation des amortissements sur les 9 premières années
3. Essayer expérimentalement de déterminer le montant des annuités pour que les dix annuités soient identiques.
Lorsque ce montant est déterminé, vérifier la variation des amortissements sur les 10 années.

Après détermination théorique du montant de l'annuité constante :

4. Construire un tableau, donnant le service de cet emprunt et restant valable si l'on modifie le capital emprunté, le taux ou le nombre d'années.