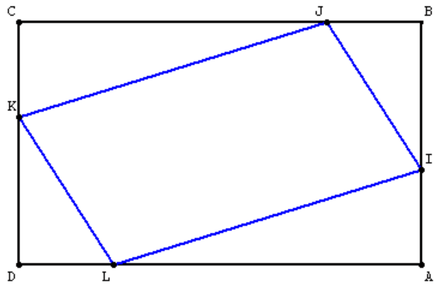
Trois énoncés classiques

❖ Parallélogramme articulé (Math'x 2005)

ABCD est un rectangle de dimensions AB = 3 et AD = 5 (unité de longueur : 1cm).
Pour tout x de [0 ; 3], on place les points I, J, K et L sur les côtés du rectangle tels que AI = BJ = CK = DL = x.



On s'intéresse à l'aire $\mathscr{A}(x)$ du polygone IJKL en fonction de x.

1. Exprimer AL et BI en fonction de x. En déduire que $\mathscr{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15$.

2. Démontrer que pour tout x de [0 ; 3], $\mathscr{A}(x) = 2(x-2)^2 + 7$.

3. Le but de cette question est d'étudier le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$ sur [0 ; 3].
a. Recopier les démonstrations ci-après : on complètera à chaque ligne les inégalités obtenues et on les justifiera.

Si $2 \le a < b \le 3$
alors ….. $a-2$.......$b-2$ ….car …..
d'où .....$(a-2)^2$.....$(b-2)^2$..... car ……
puis .....$2(a-2)^2$.....$2(b-2)^2$..... car …….
et enfin .....$2(a-2)^2+7$.....$2(b-2)^2+7$..... car ……

Pour tous a et b de l'intervalle [….. ; …..] tels que $a < b$, on a donc $\mathscr{A}(a)$ … $\mathscr{A}(b)$.

b. Quel est le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$ sur [2 ; 3] ?

c. Reprendre la même démonstration en supposant cette fois-ci que $0 \le a < b \le 2$.
Quel est le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$ sur [0 ; 2] ?

d. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathscr{A}$ sur [0 ; 3].

4. Pour quelle valeur de x l'aire du polygone IJKL est-elle minimale ? La calculer.

❖ Fonction homographique

Soit f la fonction définie sur [-0,5 ;1] par $f(x) = \dfrac{-x}{x+1}$.

1. **Conjecture**

Utiliser la calculatrice graphique pour conjecturer le sens de variation de f.

2. **Preuve**

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = -1 + \dfrac{1}{x+1}$.

b) Soit deux réels u et v appartenant à l'intervalle [-0,5 ; 1] et tels que $u \leq v$.
Compléter les inégalités suivantes en justifiant chaque étape.

Si $-0,5 \leq u \leq v \leq 1$

alors ….. $u+1$....$v+1$….

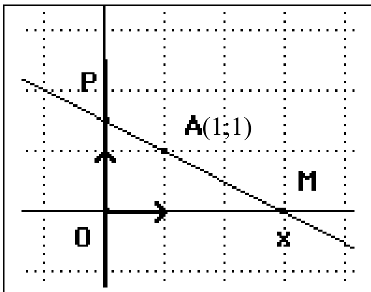
alors .....$\dfrac{1}{u+1}$.....$\dfrac{1}{v+1}$.....

alors .....$-1+\dfrac{1}{u+1}$.....$-1+\dfrac{1}{v+1}$.....

et donc : .....$f(u)$.....$f(v)$......

Qu'en déduit-on pour la fonction f sur l'intervalle [-0,5 ; 1] ?
Faire le tableau de variation de f.

❖ Optimisation



Dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, le point A (1;1) est fixe et M est un point libre de l'axe des abscisses, d'abscisse $x > 1$.

La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en P.

On cherche la position de M pour laquelle l'aire du triangle OMP est minimale.

1) En utilisant le théorème de Thalès, déterminer l'ordonnée de P en fonction de x.

2) On note $f(x)$ l'aire du triangle OMP, exprimée en cm^2.

Montrer que pour tout $x > 1$, $f(x) = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$.

3) **Étude du minimum**

- Conjecture

Utiliser la calculatrice pour conjecturer l'existence d'un minimum de la fonction f sur $]1;+\infty[$.

- Preuve

a) Montrer que pour tout $x > 1$, $f(x) - f(2) = \dfrac{(x-2)^2}{2(x-1)}$.

b) Étudier le signe de $f(x) - f(2)$ sur $]1;+\infty[$ puis montrer que sur $]1;+\infty[$, la fonction f admet un minimum que l'on précisera. En quelle valeur est-il atteint ?