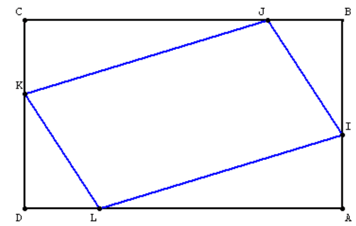
Des évolutions possibles vers le programme 2009

❖ Parallélogramme articulé

Capacités attendues : connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.
Commentaire : savoir mettre sous forme canonique un polynôme du second degré n'est pas un attendu du programme.

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 3 cm et AD = 5 cm.
Les points I, J, K et L sont respectivement placés sur les côtés [AB], [BC], [CD] et [AD] de telle façon que AI = BJ = CK = DL = x.
On s'intéresse à l'aire $f(x)$ du polygone IJKL.



L'attendu est aussi qu'ils soient capables, pour résoudre un problème, de donner de façon autonome le sens de variation d'une fonction trinôme du second degré.
L'élève pourra par exemple :
- prendre appui sur le fait – établi en cours – qu'une fonction polynôme de degré 2 est soit croissante puis décroissante, soit le contraire.
- articuler observations de l'expression et d'un graphique obtenu avec une calculatrice.

1. Démontrer que IJKL est un parallélogramme.
2. Quel est l'intervalle des valeurs possibles de x ?
3. a. Exprimer en fonction de x l'aire des triangles AIL et BIJ.
   b. En déduire que l'aire $f(x)$ du parallélogramme IJKL est : $2x^2 - 8x + 15$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 3] en justifiant la réponse.
5. Pour quelle valeur de x l'aire du parallélogramme IJKL est-elle minimale ? Que vaut cette aire ?

Version bis

Construire chez tout élève cette autonomie nécessite une formation adaptée incluant une confrontation fréquente à des problèmes sous une forme ouverte.

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 3 cm et AD = 5 cm.
Les points I, J, K et L sont respectivement placés sur les côtés [AB], [BC], [CD] et [AD] de telle façon que AI = BJ = CK = DL.
Comment varie l'aire de IJKL ?
Est-il possible de placer le point I de sorte que l'aire du quadrilatère IJKL soit la plus petite possible ?

❖ Pourcentages d'évolution et fonction homographique (d'après Hyperbole 2009)

Dans la mesure du possible, les problèmes posés s'inspirent de situations liées à la vie courante.

I – Pourcentage d'évolution et coefficient multiplicateur

1. Lorsqu'un prix subit une hausse de 20%, par combien est-il multiplié ? Et lorsqu'il subit une baisse de 20% ?
2. Un prix subit une hausse de 20%, puis une seconde évolution qui le ramène à sa valeur initiale. Quel est le taux de cette baisse ?
3. D'une façon plus générale, un prix P subit deux évolutions successives, la première à un taux x et la seconde à un taux y de sorte qu'il revient à sa valeur initiale P.
   a) Démontrer que $(1+x)(1+y)=1$.
   b) En déduire : $y=\dfrac{1}{x+1}-1$.

II – Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur l'intervalle [-0,5 ; 1] par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1$.

Les fonctions abordées sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné.

1. a) Avec la calculatrice, réaliser une table de valeurs de $f(x)$ pour x variant dans [-0,5 ; 1].
   b) A partir de cette table, conjecturer le sens de variation de f.
   c) Afficher la courbe représentative de f avec une fenêtre adaptée. La conjecture précédente est-elle confirmée ?

Hormis le cas de la fonction inverse, la connaissance générale des variations d'une fonction homographique et sa mise sous forme réduite ne sont pas des attendus du programme.

2. a) Écrire un programme de calcul de l'image d'un nombre par f. Ne pas oublier de le tester !
   b) Compléter le tableau de variation suivant en justifiant les étapes.

x	- 0,5 1	Justification
$x \mapsto x+1$	$\ldots \nearrow \ldots$	
$x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$		
$x \mapsto \dfrac{1}{x+1} - 1$		

Le programme ne fixe pas comme objectif qu'un élève devienne capable d'étudier dans le cas général les variations d'une fonction en mobilisant l'effet sur l'ordre d'un enchaînement de fonctions de référence.

Conduire certains élèves à étudier les variations d'une fonction en mobilisant l'effet sur l'ordre d'un enchaînement de fonctions de référence peut participer d'une saine différenciation pédagogique. De même, certains élèves peuvent accéder à une pratique de la démonstration formelle de la monotonie.

3. a) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité 10 cm.

Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique.

   b) A l'aide de la courbe, répondre aux questions suivantes :
   - Retrouver le résultat de la question 2 de la partie I.
   - Quelle évolution faut-il faire subir à un prix diminué de 25% pour retrouver le prix initial ?

❖ Problème d'optimisation

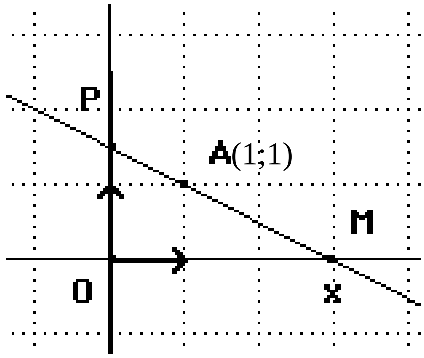
Les situations proposées dans ce cadre sont issues de domaines très variés : géométrie plane, etc. Les logiciels mis à la disposition des élèves (tableur, traceur de courbes, logiciels de géométrie dynamique, de calcul numérique, de calcul formel, etc.) peuvent être utilement exploités.

Le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité 1 cm.
Le point A (1;1) est fixe et on choisit deux points à coordonnées positives : M sur l'axe des abscisses et P sur l'axe des ordonnées tels que la droite (MP) passe par A.
On cherche la position de M pour laquelle l'aire du triangle OMP est minimale puis la position de M pour laquelle l'aire est égale à 10 cm^2.

TP en salle informatique

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'optimisation et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels.

Partie I : Travail préparatoire



x désigne l'abscisse du point M dans le repère choisi.
Dans quel intervalle varie x ? Justifier.
1) On note $f(x)$ l'aire du triangle OMP, exprimée en cm².

Montrer que pour tout $x > 1$, $f(x) = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$

2) A l'aide de la calculatrice ou d'un grapheur, conjecturer l'existence d'un minimum.

Partie II : Étude à l'aide d'un logiciel de calcul formel

Le calcul formel exécute les calculs trop difficiles pour un élève de seconde, mais c'est bien à l'élève qu'est laissé le soin d'analyser les différentes écritures obtenues et de choisir la mieux adaptée pour résoudre son problème.

1) Écrire sous forme simplifiée $f(x) - f(2)$.
Montrer que sur $]1;+\infty[$, la fonction f admet un minimum que l'on précisera. En quelle valeur est-il atteint ?

1 Définition de la fonction f et recherche de son minimum
2 f(x):=(x^2)/(2*(x-1))
$$x \to \frac{x^2}{2\cdot(x-1)}$$
3 f(2)
$$2$$
4 factoriser(f(x)-f(2))
$$\frac{(x-2)^2}{2\cdot(x-1)}$$
5 resoudre(f(x)-f(2)<=0)
$$[x<1]$$

2) A l'aide de la fonction « **resoudre** », déterminer les valeurs exactes de l'équation $f(x) = 10$.

6 Recherche des solutions de l'équation f(x)=10
7 resoudre(f(x)=10)
$$[-4\cdot\sqrt{5}+10 \quad 4\cdot\sqrt{5}+10]$$

Prolongement pour certains élèves
Démontrer les résultats des questions précédentes ; on pourra utiliser le logiciel en aide dans les différentes étapes de calcul.

10 Recherche des solutions de f(x)=10 en détaillant le calcul avec Xcas
11 simplifier(f(x)-10=0)
$$\left(\frac{x^2+(-20)\cdot x+20}{2\cdot x-2}\right)=0$$
12 forme_canonique(x^2-20*x+20)
$$(x-10)^2-80$$
13 resoudre((x-10)^2=80)
$$[-4\cdot\sqrt{5}+10 \quad 4\cdot\sqrt{5}+10]$$

Version bis : Problème de recherche (travail de fin d'année en groupes)

Construire chez tout élève cette autonomie nécessite une formation adaptée incluant une confrontation fréquente à des problèmes posés sous une forme ouverte.