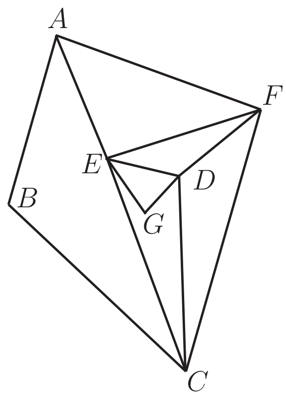
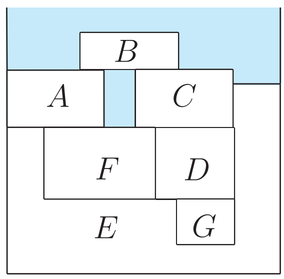
Exercices pour la série ES

Exercice n° 1 (enseignement de spécialité)

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



On donne une carte de géographie, schématisée ci-contre, dans laquelle A, B, C, D, E, F, G représentent des pays et la zone colorée représente un océan.



1- Si l'on décide de modéliser cette carte par le graphe $\mathcal{G}$, quel sens faut-il donner à l'existence d'une arête entre deux sommets ?

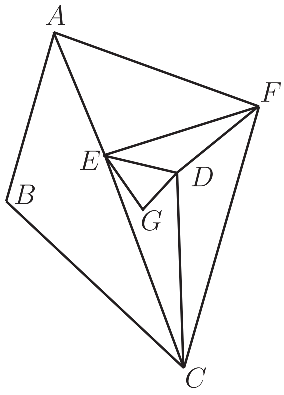
2- a) Existe-t-il un parcours qui permette de franchir chacune des frontières terrestres entre ces pays une fois et une seule ? Si oui, en citer un.

b) Existe-t-il un tel parcours pour lequel le pays de départ et le pays d'arrivée sont les mêmes ?

3- Déterminer le nombre minimal de couleurs permettant de colorier cette carte de sorte que deux pays voisins n'aient jamais la même couleur. Réaliser un tel coloriage.

Exercice n° 2 (enseignement de spécialité)

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



Partie I :

On appelle χ le nombre chromatique du graphe $\mathcal{G}$.

1- Que peut-on dire du sous-graphe $CDEF$?

2- Démontrer que l'on a : $4 \leqslant \chi \leqslant 6$.

3- Déterminer la valeur de χ.

Partie II : On considère un groupe d'élèves de 7 élèves appelés A, B, C, D, E, F et G.
Pour un exposé, les élèves se mettent en équipes mais il faut respecter les incompatibilités entre les élèves.
Dans le tableau ci-contre, chaque croix indique une incompatibilité entre les élèves correspondants.

	A	B	C	D	E	F	G
A		×			×	×	
B	×		×				
C		×		×	×	×	
D			×		×	×	×
E	×		×	×		×	×
F	×		×	×	×		
G				×	×		

1- Si l'on décide de modéliser ce tableau d'incompatibilité par le graphe $\mathcal{G}$, quel sens faut-il donner à l'existence d'une arête entre deux sommets ?

2- Combien d'équipes faudra-t-il créer au minimum ? Proposer une répartition des élèves en équipes.

Remarque : une équipe peut comporter un seul élève.

Exercice n° 2 (enseignement de spécialité)

Un guide touristique classe chaque année les hôtels d'une certaine région en deux catégories selon la qualité de leurs prestations. Les plus confortables sont classés dans la catégorie A, les autres dans la catégorie B. On constate que, chaque année, 5% des hôtels de la catégorie A sont relégués dans la catégorie B, alors que 20% des hôtels de la catégorie B sont promus dans la catégorie A.

1- Dessiner un graphe décrivant cette situation.

2- Écrire la matrice de transition associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique.

3- En 2002, le classement était tel que le quart des hôtels étaient classés dans la catégorie A. Calculer l'état de l'année 2003, puis l'état de l'année 2004.

4- L'état (0,5 ; 0,5) est-il stable ? Justifier cette réponse.

5- Trouver vers quel état converge ce système.

Exercice n° 3 (enseignement obligatoire)

On considère les deux fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{9}{3x+1} \text{ et } g(x) = \frac{9}{(x+1)^2},$$

et on désigne par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal.

1- a) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

b) Donner, sur un même dessin, l'allure de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ restreintes à l'intervalle $[0, 10]$. On pourra utiliser une calculatrice.

2- On note, pour tout nombre réel $a > 0$, $F(a) = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ et $G(a) = \int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $F(a) = 3\ln(3a+1)$ et $G(a) = \frac{9a}{a+1}$.

b) Donner les valeurs exactes de $F(2)$ et $G(2)$, puis une valeur décimale arrondie au centième.

c) Interpréter graphiquement $F(2)$ et $G(2)$.

3- Calculer $\lim_{a\to+\infty} F(a)$ et $\lim_{a\to+\infty} G(a)$. Ces résultats étaient-ils prévisibles au vu des questions précédentes ?

Exercice n° 4 (enseignement obligatoire)

On considère les fonctions f, g et h, définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$, respectivement par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \mathrm{e}^x \qquad h(x) = -3x+2.$$

1- Rappeler les sens de variation des fonctions f, g et h.

2- Écrire l'expression, en fonction de la variable x, des fonctions $h \circ f$ et $g \circ h$, définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis, en utilisant la composition des fonctions, étudier le sens de variation de ces deux fonctions.
