Les similitudes en terminale S (spécialité)

Introduction

Au cours des années antérieures, les élèves ont étudié les triangles semblables (définis par l'égalité des angles ou par l'existence d'un coefficient d'agrandissement réduction). Ils ont étudié des exemples de transformations (translations, homothéties, rotations) soit en classe de première soit dans le tronc commun de la classe terminale en liaison avec leur forme complexe. Dans ces études, les transformations agissent d'abord sur une configuration (collège, seconde), puis sur le plan entier. Les composées des transformations étudiées ne sont pas envisagées systématiquement ni a fortiori le groupe qu'elles constituent.

L'objectif de la spécialité est une étude des similitudes du plan, définies par une condition de conservation : on appelle similitude du plan toute transformation du plan qui conserve les rapports de distances. C'est donc le choix d'une définition en « compréhension » ou « descriptive »: on donne la condition que doivent vérifier les similitudes et non la liste des similitudes. Sur la définition, certaines propriétés sont immédiates: la composée de deux similitudes, la réciproque d'une similitude sont encore des similitudes. On dispose d'autre part des exemples que les élèves ont rencontrés antérieurement.
Les questions suivantes sont alors naturelles : quelle est la forme générale d'une similitude plane ? que peut-on dire de la composée de deux similitudes simples (par exemple la composée d'une homothétie et d'une rotation de centres différents) ; quelles sont les similitudes envoyant une configuration donnée en une autre configuration ?

On précise ci-dessous les contenus et une progression possible. Le contexte est celui du plan orienté ; la donnée d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ permet d'utiliser le plan complexe **C**.

Remarque sur le langage.
Une transformation est par définition une bijection T du plan dans lui-même : cela signifie qu'à tout point M est associé un unique point noté T(M), de sorte que, pour tout point N, il existe un unique point M du plan tel que T(M)=N.
La transformation réciproque T' est définie par la condition T'(N)=M si et seulement si T(M)=N.
Les notions générales de bijection et de bijection réciproque ne sont pas au programme. Cependant, ces termes pourront être utilisés à l'occasion de l'étude des exemples de bijections du programme : exponentielle et logarithme, puissance n et racine nième, transformations géométriques.

On trouvera ci-dessous des articulations possibles entre les notions du programme.

Généralités sur les similitudes du plan

Par définition une similitude (plane) est une transformation du plan (bijection du plan dans lui-même) qui conserve les rapports de distances. On démontrera que cela équivaut à l'existence d'un réel k tel que la transformation multiplie les distances par k. Ce réel k est appelé rapport de la similitude.

Par exemple, translations, homothéties, symétries axiales sont des similitudes, dont on précisera le rapport ; dans le plan complexe, transformations de la forme $z \longmapsto az+b$ ou $z \longmapsto a\bar{z}+b$ (a complexe non nul) sont des similitudes de rapport $|a|$.

De plus, la composée de deux similitudes, l'application identité, la réciproque d'une similitude sont des similitudes. Le rapport de la composée de deux similitudes est le produit des rapports des deux similitudes.

La définition des similitudes met en évidence une propriété de conservation, ce qui entraîne aussitôt les propriétés liées à la composition. Il est souhaitable de faire remarquer que la composition des similitudes n'est pas commutative en donnant des exemples purement géométriques ou par calcul complexe (compositions de deux transformations $z \longmapsto az+b$).

On démontrera qu'une similitude envoie tout triangle sur un triangle semblable et qu'elle conserve les angles.
Réciproquement, une transformation ayant l'une de ces deux propriétés est une similitude, mais ce résultat n'est pas au programme : le professeur conserve la liberté de le faire ou non en exercice.

Une isométrie est définie comme transformation du plan qui conserve les distances : c'est donc une similitude de rapport 1.
Translations, symétries axiales, rotations sont des exemples d'isométries.

Etude des similitudes directes

Par définition, une similitude directe est une similitude qui conserve les angles orientés.
De façon plus explicite, une similitude s est directe si, pour tous points A,B,C,D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, on a $\left(\overrightarrow{s(A)s(B)}, \overrightarrow{s(C)s(D)}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Par exemple, translations, homothéties, rotations sont des similitudes directes ; dans le plan complexe, transformations $z \longmapsto az+b$ sont des similitudes directes.
La composée de deux similitudes directes et la réciproque d'une similitude directe sont des similitudes directes.

On pourra dire que deux triangles semblables sont directement semblables s'il y a égalité des angles orientés correspondants. On pourra dire qu'ils sont inversement semblables si les angles correspondants sont opposés.

Remarques. On démontrera qu'une similitude directe envoie tout triangle sur un triangle directement semblable. En exercice, on peut établir la réciproque. On peut aussi remarquer qu'une transformation du plan est une similitude directe si et seulement si elle conserve les angles orientés (car elle envoie alors tout triangle sur un triangle directement semblable) mais il n'est pas indispensable d'entrer dans ces détails.

Le programme demande d'établir la forme complexe des similitudes directes. Pour cela, un moyen efficace est d'établir la propriété suivante qui exploite les connaissances acquises sur les nombres complexes :
Si s est une similitude directe du plan complexe, si p, q, r sont les affixes de trois points distincts et si p', q', r' sont les affixes de leurs images par s, alors (r'-p')/(q'-p')=(r-p)/(q-p) .

On démontre cette propriété par égalité des modules et des arguments.

Forme complexe des similitudes directes
Le résultat central est le suivant. Les similitudes directes du plan complexe sont les transformations de la forme $z \mapsto az+b$, où a et b sont deux nombres complexes, a étant non nul.
En effet, soit s est similitude directe ; si z est un nombre complexe, il suffit d'appliquer la propriété précédente à (p,q,r)=(0,1,z) pour obtenir (z'-p')/(q'-p')=(z-0)/(1-0), et donc z'=(q'-p')z+p', où p',q',z' désignent les affixes des images par s des points d'affixes 0,1,z. Il en résulte que s est de la forme $z \mapsto az+b$ où a est non nul.
Réciproquement, pour a non nul, $z \mapsto az+b$ définit une similitude directe.

Angle d'une similitude directe. Soit s une similitude directe. L'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{s(A)s(B)}\right)$ ne dépend pas des points distincts A et B. On l'appelle angle de la similitude.
L'angle de la composée de deux similitudes directes est égal à la somme des angles des deux similitudes.
Ces propriétés se démontrent avec la forme complexe ; on fera observer que la mesure de l'angle de la similitude est l'argument de a dans l'expression $z \mapsto az+b$).

Point fixe d'une similitude directe. Une similitude directe qui n'est pas une translation admet un unique point fixe. On dit que c'est le centre de la similitude. Cela résulte de la forme complexe des similitudes.
Les moyens géométriques de déterminer le point fixe d'une similitude directe sont hors programme.

Description géométrique complète des similitudes directes
Soit s une similitude directe de rapport k, et d'angle θ. Deux cas sont possibles :
-s est une translation (se produit si k=1 et θ=0 modulo 2π);
-s possède un unique point fixe Ω et est la composée (commutative) de l'homothétie de centre Ω et de rapport k et de la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Une propriété utile du centre d'une similitude directe.
Soit O le centre d'une similitude directe. Soient M et N deux points quelconques du plan, M' et N' leurs images. Alors les triangles OMM' et ONN' sont directement semblables.

Similitudes directes et couples de points.
Soient A,B,A',B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors il existe une unique similitude directe telle que s(A)=A' et s(B)=B'.
Pour démontrer ce résultat, on cherche a et b tels que la similitude soit donnée par $z \mapsto az+b$
Cela revient à résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

On peut aussi établir alors qu'étant donnés deux triangles directement semblables, il existe une unique similitude directe qui envoie le premier sur le second.

Application à l'étude des déplacements.
Un déplacement est, par définition, une similitude directe de rapport 1, autrement dit une isométrie qui conserve les angles orientés.
Il résulte de l'étude générale que tout déplacement est soit une translation, soit une rotation.
La construction géométrique du centre de la composée de deux rotations de centres distincts, ou du centre de la composée d'une rotation et d'une translation ne sont pas au programme.

Effet des similitudes directes sur certaines configurations
Comme conséquence de la détermination complète des similitudes directes, on déterminera l'image par une similitude directe d'un barycentre. On étudiera l'effet d'une similitude directe sur une droite, un segment, un cercle.
Ces propriétés seront fréquemment utilisées dans les exercices d'études de configurations ou de recherche de lieux géométriques exploitant les similitudes directes.

Remarque sur la méthode d'étude des similitudes directes
Dans un souci d'efficacité, le programme privilégie les nombres complexes pour établir les résultats sur les similitudes directes. Les éviter nécessiterait de plus longs développements, (étude préalable des déplacements, puis composition de déplacements et d'homothéties).
Cependant, la résolution d'exercices et de problèmes ne se limitera pas à du calcul dans le plan complexe : le professeur veillera à équilibrer les deux aspects en proposant aussi bien des exercices utilisant les nombres complexes que des exercices où les similitudes apparaîtront de façon purement géométrique.

Etude générale des similitudes planes
L'étude des similitudes quelconques passe par les résultat suivants.
1) Une similitude qui admet trois points fixes non alignés est l'identité.
2) Une similitude qui admet deux points fixes distincts A et B est l'identité ou la symétrie axiale d'axe (AB).
Pour démontrer 1), on commence par remarquer que le rapport de la similitude est 1 donc que c'est une isométrie ; on observe alors que s'il existait un point M dont l'image M' était distincte de M, tout point fixe de la similitude appartiendrait à la médiatrice de [MM'], en contradiction avec le fait qu'il y a trois points fixes non alignés.
Pour établir 2), s désignant la similitude en question, on considère un point C n'appartenant pas à la droite (AB) et C'=s(C) : si C'=C, s est l'identité d'après 1) ; sinon, la droite (AB) est la médiatrice de [CC'] et on constate que la composée s et de la symétrie axiale d'axe (AB) laisse fixe A, B,C et est donc l'identité, ce qui montre que s coïncide avec la symétrie axiale d'axe (AB).

Forme géométrique des similitudes non directes
Une similitude non directe peut s'écrire sous la forme $\sigma o h$, où σ est une similitude directe et h une symétrie axiale.
En effet, soient A, B deux points distincts et A', B' leurs images par la similitude indirecte s. Notons σ la similitude directe qui envoie A et B sur A' et B'et σ' la similitude réciproque de σ. Alors σ'o s est une similitude qui admet A et B comme points fixes et qui n'est pas l'identité : c'est donc une symétrie axiale h, ce qui entraîne le résultat voulu.

Forme complexe des similitudes quelconques.

On pourra établir le théorème suivant, en utilisant le raisonnement précédent où A et B sont les points d'affixes 0 et 1 :

Théorème : Toute similitude du plan complexe est de la forme $z \longmapsto az+b$ ou $z \longmapsto a\overline{z}+b$ (a complexe non nul).

Effet des similitudes quelconques sur certaines configurations

Par composition avec une symétrie axiale (ou par représentation complexe) l'effet d'une similitude non directe sur un barycentre, une droite, un segment, un cercle se déduit de l'effet par une similitude directe.

Cela achève les connaissances exigibles sur les similitudes quelconque . En particulier, les élèves n'ont pas à connaître leur forme réduite à savoir : une similitude indirecte de rapport 1 (antidéplacement) est la composée commutative d'une symétrie axiale et d'une translation de vecteur parallèle à l'axe de la symétrie ; une similitude indirecte de rapport k différent de 1 est la composée commutative d'une symétrie axiale et d'une homothétie de rapport k et de centre appartenant à l'axe de la symétrie. Il est possible cependant de faire des exercices sur ce genre de thème, mais le cas des similitudes directes doit être privilégié.

La détermination de la composée de deux symétries axiales n'étant pas au programme, les exercices y ayant recours doivent être accompagnés des indications utiles.