La machine dite « de PLATON »

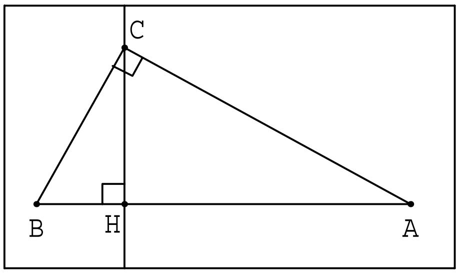
I. Objectif : Duplication du cube

Une longueur a étant donnée (arête du cube à dupliquer), il s'agit d'intercaler deux moyennes proportionnelles x et y entre a et $2a$.

(i.e. trouver deux longueurs x et y telles que : $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$).

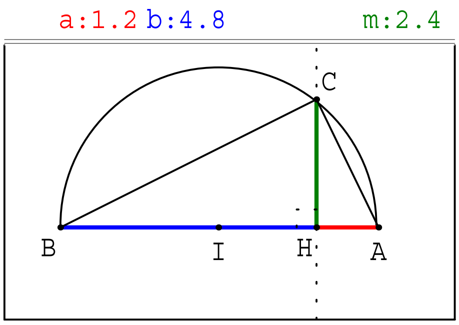
II. Approche :

Le principe consiste à utiliser la propriété suivante, jadis répertoriée au chapitre des « relations métriques dans le triangle rectangle » et pouvant actuellement être envisagée en 4ème (théorème de Pythagore), en 3ème (tangente d'un angle aigu) ou en 2de (triangles de même forme) :



Si ABC est un triangle rectangle en C et si H est le pied de la hauteur issue de C, alors $CH^2 = AH \times HB$.

En conséquence, la construction à la règle et au compas de la moyenne proportionnelle m ($\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$) de deux longueurs a et b données ($a = AH$ et $b = BH$) est du registre du collégien ($m = CH$ avec $m^2 = ab$) :



Fichier Géoplan mp1 : Voir la construction par étapes :
0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.
pour modifier a : touche A ; ← ; →
pour modifier b : touche B ; ← ; →
pour revenir au dessin initial : 0 ; 0

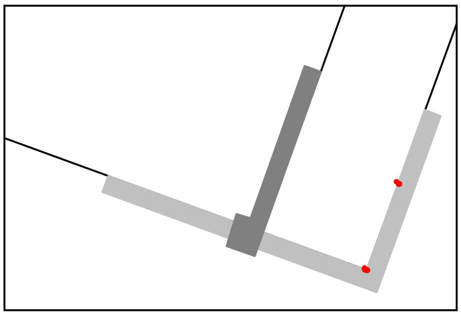
En revanche la construction de deux longueurs x et y telles que : $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ n'est pas réalisable à la règle et au compas (conséquence du théorème de Wantzel), donc le problème évoqué au § I n'est pas soluble à la règle et au compas.

La légende prête aux disciples de Platon l'idée de la conception d'un dispositif mécanique, qui, moyennant un « ajustement », permet d'utiliser deux fois la propriété rappelée ci-dessus (on voit mal l'illustre philosophe revendiquer lui-même la paternité d'une invention s'écartant autant des « canons académiques »).

III. La machine :

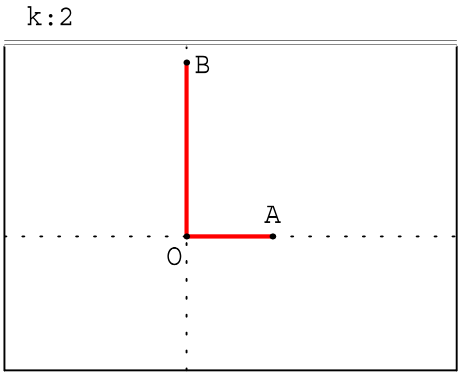
Le dispositif vise à disposer de deux droites (dont l'une est « mobile ») perpendiculaires à une même droite.
Il se compose d'une équerre et d'une tige rectiligne qui coulisse perpendiculairement sur l'une des « branches » de l'équerre en restant donc parallèle à l'autre « branche ».
L'ensemble rappelle un pied à coulisse.

Fichier Géoplan mp2 :   la machine :
l'équerre : touche E , la tige : touche G ,
pour actionner la tige : ← ; →
le dessin géométrique utile : touche P
pour actionner l'équerre : poignées rouges (souris)
pour effacer le dispositif mécanique: touche CTRL-P
pour revenir à la position initiale : touche 0 .



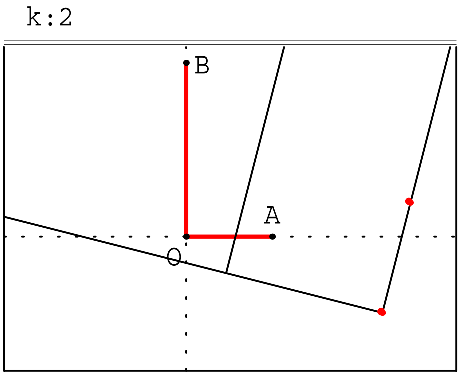
IV. L'utilisation de la machine :

Les segments [OA] et [OB] ont pour supports deux droites perpendiculaires en O.
$OA = a$ et $OB = k\,a$ (avec $k = 2$).

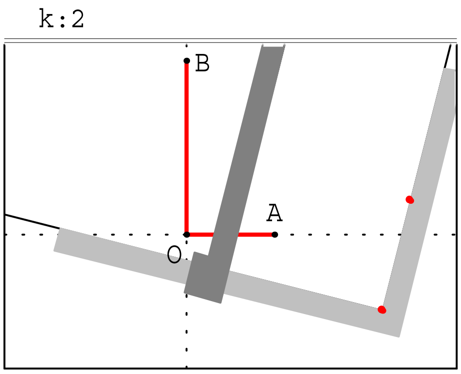


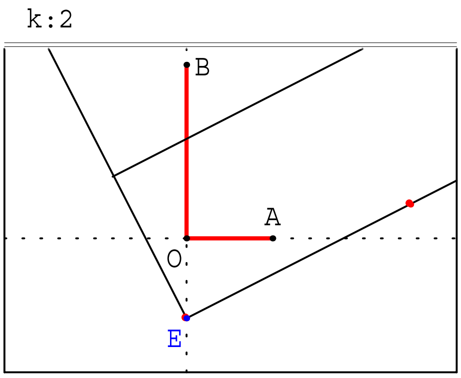
Fichier Géoplan mp3 :

touche P :
La machine de Platon simplifiée.

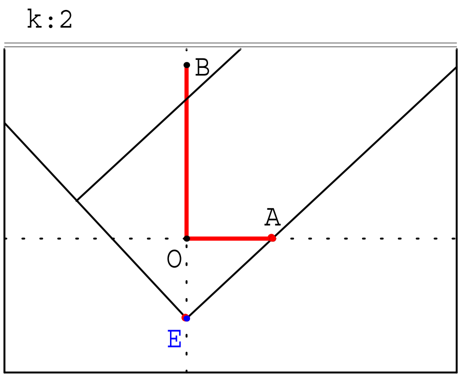


touche CTRL - P :
La machine de Platon

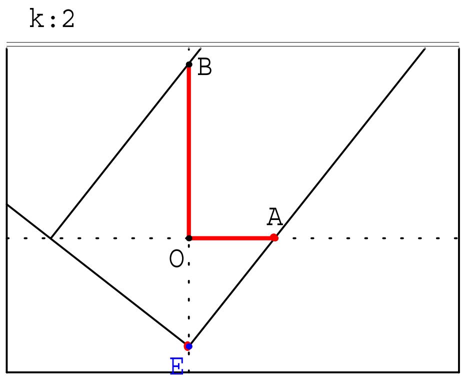




Pour maintenir la « poignée de l'angle droit » sur (OB) :
- *CTRL-E crée un point mobile E pilotable à la souris sur (OB)*
- *touche E : affecte* la *« poignée de l'angle droit » sur E.*
  En maintenant la touche E, on peut déplacer la machine en l'obligeant à cette première contrainte.

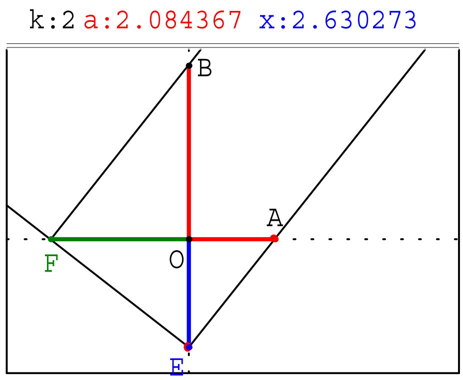


Pour imposer à la « branche fixe de l'équerre» de passer par A :
- *touche A.*
- *En maintenant la touche E, on peut déplacer la machine en l'obligeant à ces deux contraintes.*



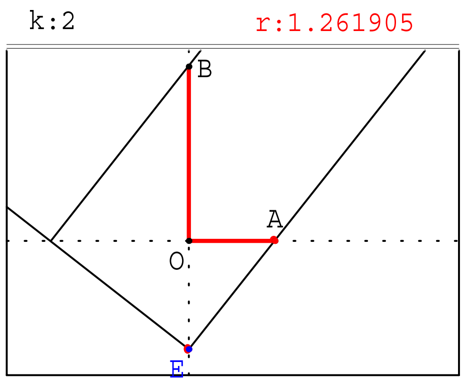
Il s'agit maintenant :
- *en maintenant la touche E*
- *en déplaçant le point E à la souris*
- *en faisant coulisser la tige mobile à l'aide des commandes ← ; →*

« d'ajuster » le point E de façon à ce que le deuxième sommet d'angle droit de la machine soit situé sur (OA) et que la tige mobile passe par le point B !



Touche X :
- *surligne en bleu le segment [OE]*
- *affiche x une mesure approchée de sa longueur*
- *affiche a une mesure approchée de la longueur du segment [OA].*
- *reste à comparer* $2\,a^3$ *avec* x^3.

Touche Y :
- *nomme le point F*
- *surligne en vert le segment [OF].*



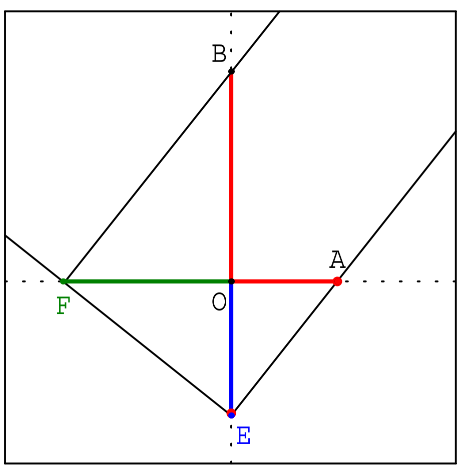
Touche R :
- *affiche une valeur approchée de x/a.*

Touche 0 :
- *retour à la configuration initiale.*

REMARQUE:

touche K suivie de ← ; → permet d'attribuer d'autres valeurs à l'entier k et donc d'obtenir par une démarche analogue la longueur approchée OE de l'arête d'un cube dont le volume est égal à k fois celui du cube d'arête [OA] et d'en déduire une valeur approchée de la racine cubique de k. (attention après le choix d'une nouvelle valeur de k revenir à la configuration initiale par la touche 0 pour pouvoir actionner la tige de machine).

V. La justification :



En imaginant l'ajustement parfait :

- Dans le triangle *AEF* rectangle en *E*, *O* est le pied de la hauteur issue de *E*, donc selon la propriété §II : $\dfrac{OA}{OE} = \dfrac{OE}{OF}$.
- De même dans le triangle *EFB* rectangle en *F*, *O* est le pied de la hauteur issue de *F*, donc $\dfrac{OE}{OF} = \dfrac{OF}{OB}$.

- On obtient : $\dfrac{OA}{OE} = \dfrac{OE}{OF} = \dfrac{OF}{OB}$

  c'est à dire, en posant $OE = x$ et $OF = y$: $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{2a}$.

Un cube d'arête $[OE]$ aura donc un volume double d'un cube d'arête $[OA]$

c'est à dire en notations actuelles : $x^3 = 2a^3$ ou encore : $\dfrac{x}{a} = \sqrt[3]{2}$.

Remarque :

La démarche reste utilisable pour tout k ($k > 0$) et permet donc à partir de l'arête a d'un cube de volume V d'obtenir l'arête x d'un cube dont le volume est égal à kV c'est à dire $x^3 = ka^3$ ou encore $\dfrac{x}{a} = \sqrt[3]{k}$.