Le mésolabe d'ERATOSTHENE

I. Objectif : Duplication du cube

Une longueur a étant donnée (arête du cube à dupliquer), il s'agit d'intercaler deux moyennes proportionnelles x et y entre a et $2a$.

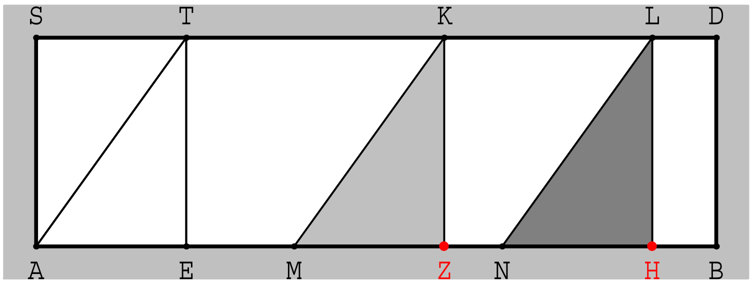
(i.e. trouver deux longueurs x et y telles que : $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$).

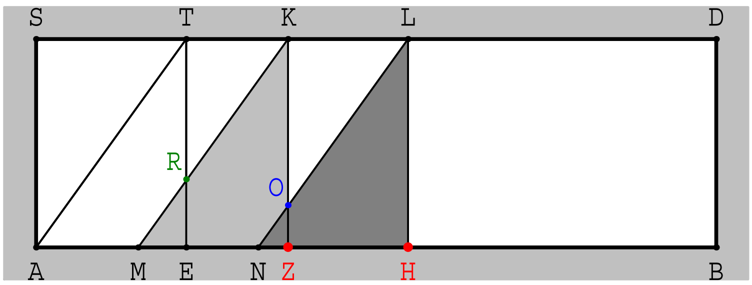
II. Approche :

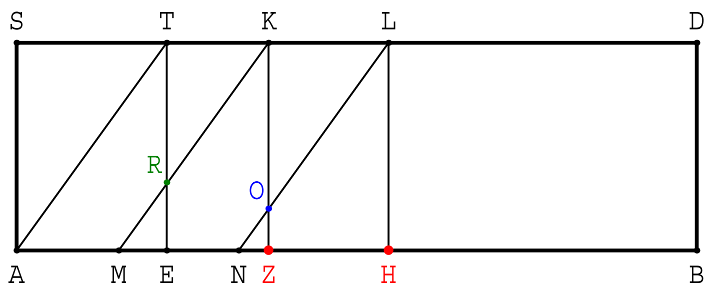
Pappus, l'un des derniers grands mathématiciens de l'école d'Alexandrie ($\text{IV}^{\text{ème}}$ ap.J.C.) propose dans le Livre III de sa « Collection mathématique » quatre procédés de duplication du cube.
Eutocius attribue l'invention de l'un d'eux à Eratosthène (fin du $\text{III}^{\text{ème}}$ av.J.C) en s'appuyant sur une lettre que ce dernier aurait adressée au roi Ptolémée III pour vanter les mérites de sa découverte.

Le principe du mésolabe repose sur une utilisation réitérée du théorème de Thalès.

III. La machine :







Elle est composée d'une plinthe rigide rectangulaire *ABDS* et de trois triangles *AET*, *MZK* et *NHL* rectangles (respectivement en *E*, *Z* et *H*) superposables.

Le triangle *AET* est fixe.

Le triangle *MZK* est mobile : [*MZ*] peut glisser dans la rainure rectiligne [*AB*] et *K* dans la rainure rectiligne [*TD*] les droites (*ZK*) et (*AB*) restant perpendiculaires.

Le triangle *NHL* est mobile : [*NH*] peut glisser dans la rainure rectiligne [*AB*] et *L* dans la rainure rectiligne [*TD*] les droites (*LH*) et (*AB*) restant perpendiculaires.

Le point d'intersection de [*TE*] et [*MK*] lorsqu'il existe est noté *R*.

Le point d'intersection de [*KZ*] et [*LN*] lorsqu'il existe est noté *O*.

Fichier Géoplan me1 :

La machine : CTRL-E.

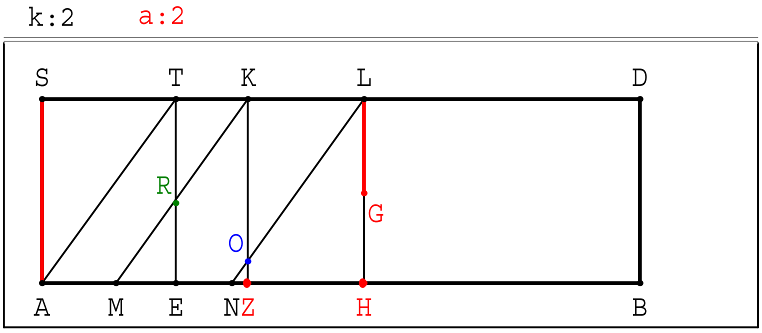
Le dessin géométrique utile : CTRL-E.

Les poignées Z et H permettent de déplacer les triangles MZK et NHL en respectant les conditions décrites ci-dessus.

IV. L'utilisation de la machine :

La machine est conçue pour permettre de dupliquer un cube dont l'arête a pour longueur :

$a = \dfrac{1}{k}\, SA$ (avec k=2).



La longueur de l'arête du cube à dupliquer est donc $a = \dfrac{1}{2}\, SA$

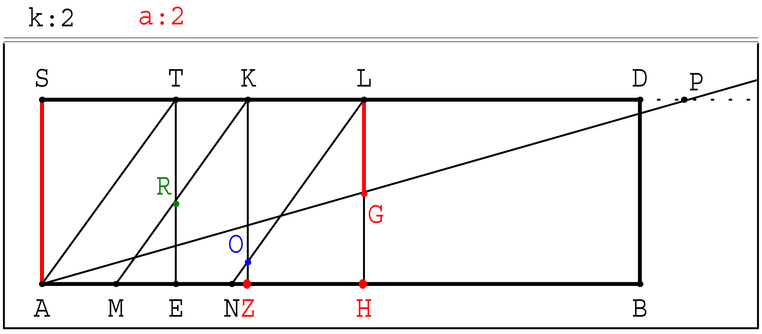
Soit G le point de $[LH]$ tel que : $LG = a = \dfrac{1}{2}\, SA$ (longueur de l'arête du cube à dupliquer).

L'idée consiste alors à utiliser les poignées Z et H pour tenter d'aligner les points A, R, O et G dans le but de considérer les segments $[SA]$, $[TR]$, $[KO]$ et $[LG]$ comme les côtés parallèles de triangles « en configuration de Thalès ».

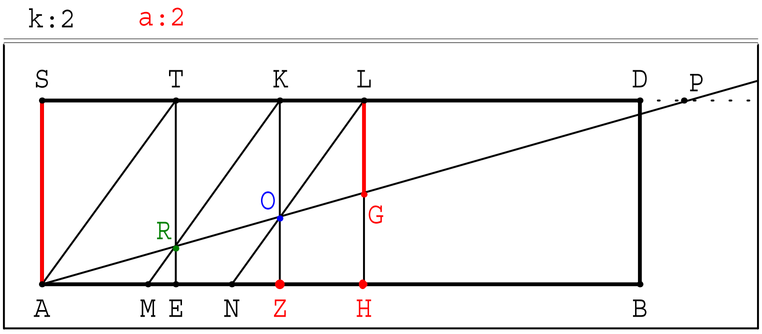
Fichier Géoplan me2 :

Touche P :
- *demi-droite [AG)*
- *P intersection de [AG) et [SD).*

Touche CTRL-P :
- *demi-droite [DP) lorsque P n'appartient pas à [SD].*



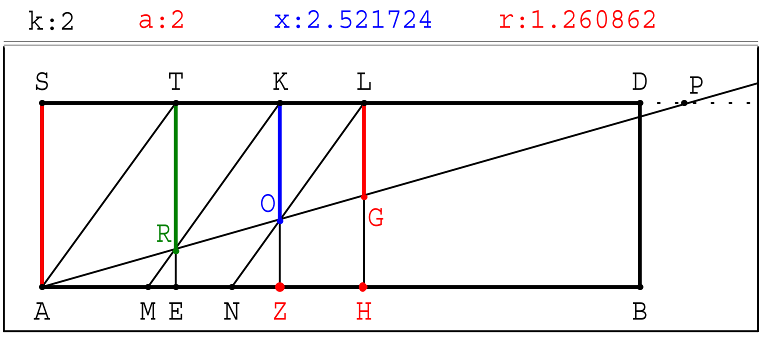
Il s'agit maintenant d'ajuster les équerres mobiles MZK et NHL en déplaçant les poignées Z et H à la souris pour tenter d'obtenir le « meilleur alignement possible » des points A, R, O et G.



Touche Y :
- *surligne en vert [TR]*

Touche X :
- *surligne en bleu [KO]*
- *affiche un mesure approchée de sa longueur x.*

reste à comparer $2\,a^3$ *avec* x^3 .



Touche R :
- *affiche une valeur approchée de x/a. la racine cubique de 2.*

REMARQUE:

touche K suivie de : → ; ← permet d'attribuer d'autres valeurs à l'entier k et donc d'obtenir par une démarche analogue une valeur approchée de la racine cubique de k.

V. La justification :

On supposera l'ajustement parfaitement réalisé, donc l'alignement des points A, R, O, G, P réellement effectif.

Une fois justifié le parallélisme des droites (SA), (TE), (KZ) et (LH), puis celui des droites (AT), (MK) et (NL), il s'agit d'utiliser le théorème de Thalès « en cascade » :

- dans les triangles KOP et LGP d'où : $\dfrac{LG}{KO} = \dfrac{LP}{KP}$
- dans les triangles KRP et LOP d'où : $\dfrac{LP}{KP} = \dfrac{OP}{RP}$
- dans les triangles TRP et KOP d'où : $\dfrac{OP}{RP} = \dfrac{KO}{\mathrm{TR}} = \dfrac{KP}{TP}$
- dans les triangles TAP et KRP d'où : $\dfrac{KP}{TP} = \dfrac{RP}{AP}$
- dans les triangles SAP et TRP d'où : $\dfrac{RP}{AP} = \dfrac{\mathrm{TR}}{SA}$

On obtient donc : $\dfrac{LG}{KO} = \dfrac{LP}{KP} = \dfrac{OP}{RP} = \dfrac{KO}{\mathrm{TR}} = \dfrac{KP}{TP} = \dfrac{RP}{AP} = \dfrac{\mathrm{TR}}{SA}$ d'où : $\dfrac{LG}{KO} = \dfrac{KO}{\mathrm{TR}} = \dfrac{\mathrm{TR}}{SA}$

C'est à dire, en ayant posé : $LG = a$, $KO = x$, $TR = y$ et $SA = 2\,a$: $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{2a}$.

Un cube d'arête [KO] aura donc un volume double d'un cube d'arête [LG]

c'est à dire en notations actuelles : $x^3 = 2a^3$ ou encore : $\dfrac{x}{a} = \sqrt[3]{2}$.

Remarque :

La démarche reste utilisable pour tout k ($k > 0$) et permet donc à partir de l'arête a d'un cube de volume V d'obtenir l'arête x d'un cube dont le volume est égal à kV c'est à dire $x^3 = ka^3$ ou encore $\dfrac{x}{a} = \sqrt[3]{k}$.