

b. Quel est le PGCD de 14 et 42 ?

14

Que remarques-tu ?

42 est divisible par 14

Essaie de formuler une règle à partir de ce que tu as observé.

Si deux nombres sont multiple l'un de l'autre alors le PGCD de ces deux nombres est le diviseur

on remarque que $70 = 14 \times 5$ donc $\text{PGCD}(14 ; 70) = 14$

Remarque : a et b étant des entiers naturels, si b divise a alors $\text{PGCD}(a ; b) = b$.

I Vers la méthode des soustractions successives

1) Étape 1

Sans faire de division, explique pourquoi 49 014 est un multiple de 7

49000 est divisible par 7 ainsi que 14 donc la somme est divisible par 7

et pourquoi 13 est un diviseur de 12 987.

on remarque que $12\ 987 = 13000 - 13$

2) Étape 2

Démontre la propriété suivante :

« Si d est un diviseur commun à deux entiers naturels a et b avec $a > b$ alors d est également un diviseur de $a + b$ et de $a - b$. ».

donc il existe p et q tels que $a=dp$ et $b=dq$ donc $a+b=dp+dq=d(p+q)$ donc d est un diviseur de $a+b$. De même pour $a-b=dp-bq=d(p-q)$ donc d est un diviseur de $a-b$

3) À connaître

a et b sont des entiers naturels et $a > b$, $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; a - b)$.

Exemple 2 : Détermine $\text{PGCD}(693 ; 189)$ par la méthode des soustractions successives.

Pour cela, on utilise la propriété précédente :

$\text{PGCD}(189 ; 693) = \text{PGCD}(189 ; 504) = \text{PGCD}(189 ; 315) = \text{PGCD}(189 ; 126) = \text{PGCD}(126 ; 63) = 63$