I) Situation 2 : Le produit de deux nombres relatifs.

Le professeur commence par annoncer aux élèves que l'objectif de cette situation est la mise en place de la multiplication des relatifs.

1) Étape 1 : **Compléter les égalités :**

$-3+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=$

$-5+(-5)+(-5)=$

$$\underbrace{-2,3+(-2,3)+\ldots\ldots\ldots\ldots+(-2,3)+(-2,3)}_{100\text{ termes}}=$$

<u>Déroulement en classe :</u>

Les élèves font l'addition puis s'aperçoivent qu'il est plus rapide d'utiliser la multiplication entre positifs qu'ils connaissent et d'écrire le signe – à la fin. Cette remarque leur permet de trouver le dernier résultat en calculant -2,3 $\times$ 100 sans faire effectivement l'addition

De façon naturelle, les élèves proposent d'écrire

$$(-3)\times 5=-15$$
$$(-5)\times 3=-15$$
$$(-2,3)\times 100=-230$$

Certains élèves sont surpris de remarquer que la règle des signes de l'addition ne semble plus être valable pour la multiplication : par exemple le résultat de $(-3)\times 5$ est –15 bien que 5 soit plus grand que 3.

Le professeur demande alors aux élèves s'ils peuvent prévoir le résultat pour :

$$(-3)\times 6=$$
$$3\times(-6)=$$
$$(-4,2)\times 8=$$

La mise en commun permet d'insister sur le fait qu'on peut prévoir le résultat car il est facile d'imaginer que l'on peut remplacer chaque multiplication par une addition réitérée.

Il faut ajouter 6 fois (-3) dans le premier calcul, 3 fois(-6) dans le second et 8 fois (–4,2) dans le troisième, ce qui permet de calculer alors en faisant une multiplication.

Se pose ensuite le cas des produits que l'on ne peut pas remplacer par une addition réitérée comme par exemple $4,2\times(-8)$ car aucun des facteurs ne peut jouer le rôle du « nombre de fois ». On peut conjecturer le résultat mais on voudrait le prouver.

Le professeur explique aux élèves que lorsque les mathématiciens introduisent de nouveaux nombres, ils font en sorte que les propriétés de calcul connues soient encore valables avec ces nouveaux nombres. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est donc étendue à l'ensemble des nombres relatifs ainsi que le produit par 0 qui donne 0.

En ayant ces propriétés on peut démontrer la conjecture sur le résultat de $4,2\times(-8)$

La démonstration est faite au tableau en recherchant le plus possible la participation active des élèves en classe entière.

On sait que $4{,}2 \times 8 = 33{,}6$ et on conjecture *que* $4{,}2 \times (-8) = -33{,}6$

Notre conjecture consiste donc à dire que ces deux nombres sont opposés

On le vérifie en calculant leur somme : $4{,}2 \times 8 + 4{,}2 \times (-8)$

Comme on conserve la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, on peut factoriser

$4{,}2 \times 8 + 4{,}2 \times (-8) = 4{,}2 \times [(-8) + 8] = 4{,}2 \times 0 = 0$

Ces deux nombres sont bien opposés car leur somme est nulle. La conjecture est démontrée

Le professeur peut aussi leur proposer cette deuxième démonstration qui utilise la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction.

L'idée est de remplacer(–8) avec lequel on ne sait pas calculer par le nombre positif 8 en utilisant la possibilité de remplacer (–8) par la différence 0 – 8, ce qui fait changer la nature du signe – :

$$\begin{aligned} 4{,}2 \times (-8) &= 4{,}2 \times (0-8) \\ &= 4{,}2 \times 0 - 4{,}2 \times 8 \\ &= 0 - 33{,}6 = -33{,}6 \end{aligned}$$

2) Étape 2 :

Donner le résultat de $(-5) \times (-3)$.