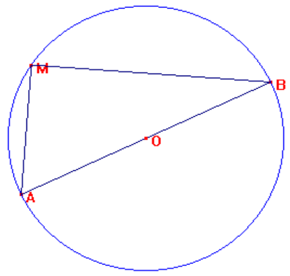
1) Étape 5

Tracer un cercle de diamètre [AB]

Quel est le point M du cercle pour lequel l'angle AMB est le plus grand ?



OAM et OMB sont des triangles isocèles en O donc les angles OAM = OMA et OMB = OBM

les angles AOM et MOB sont supplémentaire donc AOM + MOB = 180

dans le triangle AMO on a AOM = 180 – 2 x AMO

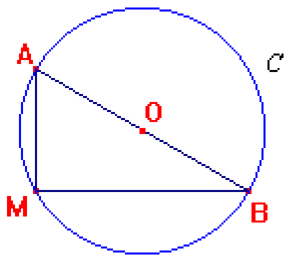
et dans le triangle BMO on a BOM = 180 – 2 x OMB

donc 180 – 2 x AMO + 180 – 2 x OMB = 180

donc 2 x (AMO + OMB) = 180

AMO + OMB = 90°

Lorsque le diamètre du cercle circonscrit à un triangle est l'un de ces cotés, alors le triangle est rectangle.
Lorsque le milieu d'un coté du triangle est à égale distance des trois sommets alors le triangle est rectangle
Soit un triangle ABC, si C appartient au cercle de diamètre [AB] alors le triangle est rectangle en C.



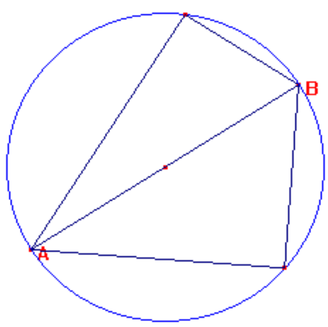
Données:
C cercle de diamètre [AB]
M ∈ C

Conclusion:
AMB est rectangle en M

2) Étape 6

Tracer trois triangles rectangles de même hypoténuse

Que peut-on dire de leur sommets



Les longueurs RC, RA, RB sont égales, les longueurs RA, RB et RD sont égales donc les points ABC et D sont à égales distance de R donc appartiennent au même cercle

Propriété : les 4 sommets sont cocycliques
Lorsque deux triangles rectangles ont la même hypoténuse,
on peut affirmer que leurs sommets sont situés sur un cercle
dont le diamètre est l'hypoténuse commune.

3) Exercice

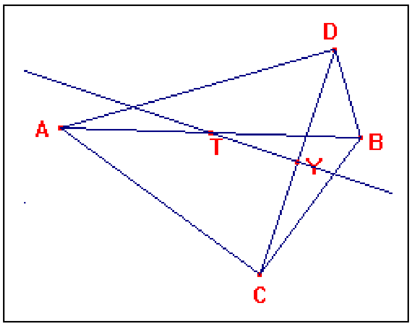
ABC est un triangle rectangle en C

BAD est un triangle rectangle en D

T est le milieu du segment [AB]

Y est le milieu du segment [CD]

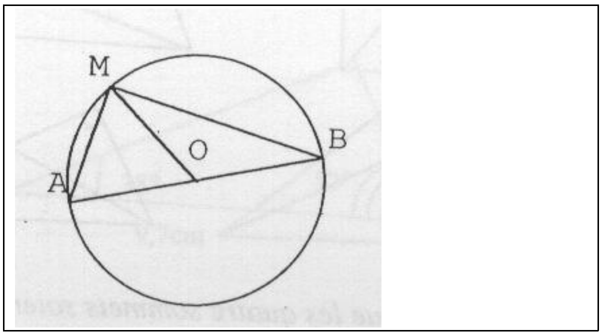
que dire de (YT) et (CD)



CTD est un triangle isocèle en T car TC = TD Y est le milieu d [CD] donc (TY) est perpendiculaire à (CD)

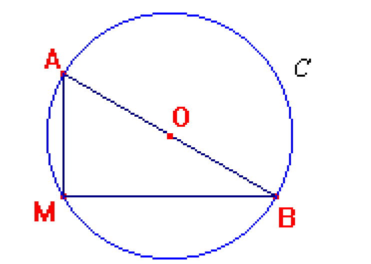
4) Exercice

Tracer un cercle de diamètre [AB] soit M un point du cercle distinct de A et B, ABM est un triangle. Quel est le point M du cercle pour lequel l'angle AMB est le plus grand ?



Une démonstration algébrique
Par les angles on peut démontrer que OAM = AMO = x,
OBM est isocèle en O donc OBM = OMB = y
La somme des angles d'un triangle étant égale à 180° :
$x+(x+y)+y=180$
$2(x+y) = 180$
$x + y = 90 =$ AMB
On peut également faire la démonstration avec le symétrique du point M par rapport au point O

Lorsque le diamètre du cercle circonscrit à un triangle est l'un de ces cotés, alors le triangle est rectangle.
Lorsque le milieu d'un coté du triangle est à égale distance des trois sommets alors le triangle est rectangle
Soit un triangle ABC, si C appartient au cercle de diamètre [AB] alors le triangle est rectangle en C.



Données:
C cercle de diamètre [AB]
M ∈ C

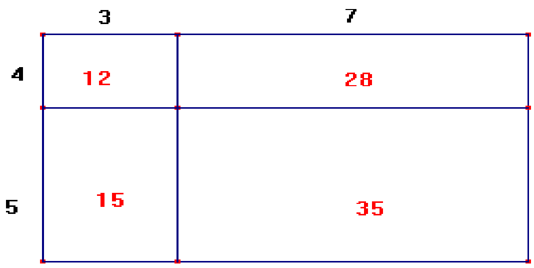
Conclusion:
AMB est rectangle en M

I La double distributivité

1) Pré-requis

Savoir développer (a+b)(c+d)

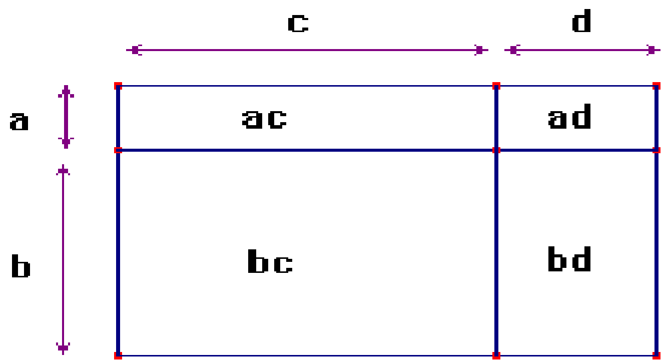
Exemple numérique avec une surface puis généralisation



12+28+15+35=90

Exemple de la forme
$(2x+3y)(5x+4y)$

Double distributivité : (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd



Exemple : $(2x+3)(5x+4) = 2x \times 5x + 2x \times 4 + 3 \times 5x + 3 \times 4 = 10x^2 + 23x + 12$

II Vers Pythagore

1) Situation 1 : Le carré d'aire double

Étape 1
Soient deux carrés de côté 10cm.
Construire en les découpant un nouveau carré d'aire double.
Quelle est l'aire du nouveau carré ?

Étape 2
Mesurer la longueur du coté ? Mesure et Vérification les élèves peuvent faire des approximation avec la calculatrice, généralement ils utilisent une méthode de dichotomie naturellement.
Observation de ce nombre, on peut alors chercher à l'identifier aux nombres que l'on connait déjà, à savoir les entiers, puis les décimaux et enfin les fractions mais aucun ne convient
Introduction de la notation racine carré

Racine carrée définition

La racine carré d'un nombre est le nombre qui multiplier par lui même donne le nombre sous la racine carré

$$\left(\sqrt{a}\right) \times \left(\sqrt{a}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097$

$\sqrt{3} = 1{,}7320508075688772935274463415059$

$\sqrt{4} = 2$

Recopie et complète le tableau suivant :

AB = 8 m	SD = 1,3 dm	ZE = ...	FG = ...	UT = ...
AB² = ...	SD² = ...dm²	ZE² = 36 cm²	FG² = 81 m²	UT² = 1,69 m²

Le nombre positif dont le carré est 841 se note $\sqrt{841}$ et se lit « racine carrée de 841 ».
Trouve, sur ta calculatrice, la touche $\sqrt{\ }$ et le moyen de saisir la séquence $\sqrt{841}$.
Quel résultat obtiens-tu avec la calculatrice ? Quel calcul te permet de vérifier que ce résultat est la valeur exacte de $\sqrt{841}$? 29
x est un nombre positif tel que $x^2 = 50$. Comment notes-tu la valeur de x ?
Fais le calcul à la calculatrice puis recopie la valeur affichée.
$\sqrt{50} = 7{,}0710678118654752440084436210485$
Si tu calcules le carré de cette valeur en posant l'opération, quel est le premier chiffre à droite que tu écriras dans le résultat ?
Déduis-en que la valeur donnée par la calculatrice n'est pas la valeur exacte de x.
Donne un encadrement de x à 0,01 près puis, en utilisant le symbole, sa valeur arrondie au centième.

Donne la valeur exacte (en utilisant le signe =) quand c'est possible ou la valeur arrondie au dixième (en utilisant le signe $\sqrt{\ }$ de chacune des longueurs dont les carrés sont donnés ci-dessous :
FR² = 156,25   NL² = 85,87   EU² = 2,5   GB² = (2,365)²   XY² = – 9   CZ² = 1,52399025

Étape 3
Généralisation au cas ou le coté mesure « a »
réutiliser la même procédure que dans le cas du carré de 10cm de côté

2) Situation 2 : La construction d'un triangle rectangle

Étape 1

- Construire un triangle rectangle sachant que les cotés de l'angle droit mesure 3 et 5 cm, mesurer l'hypoténuse, refaire le même travail avec un triangle de 6 sur 10cm. Qu'elle observation peut-on faire?

L'hypoténuse est double

- Comment peut-on démontrer le résultat obtenue.
- Construire un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit mesure 8cm et l'hypoténuse mesure 10cm

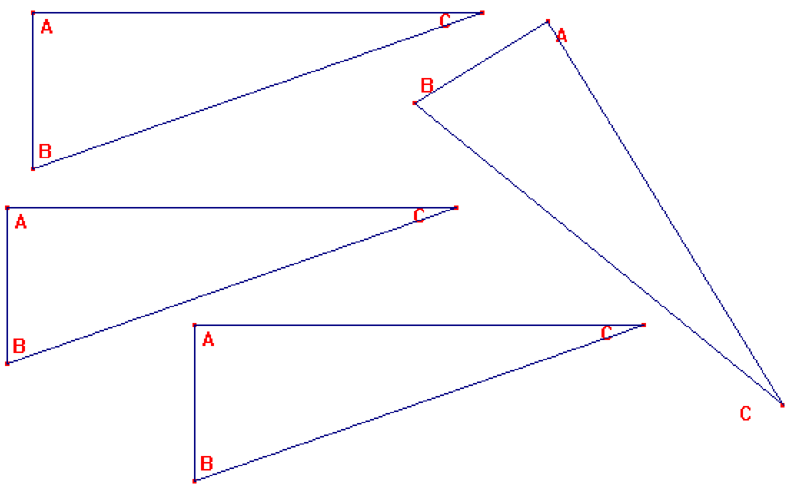
3) Situation 3 : La généralisation pour le triangle rectangle

Étape 1

Peut on généraliser la démarche de la situation 1 dans le cas du triangle rectangle.
Construction d'un rectangle puis d'un carré

Découper quatre triangle rectangles identiques et disposez les de façon à obtenir un carré.

(il peut y avoir un trou)



Solutions proposées :

Figure 1 :

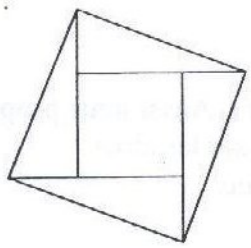
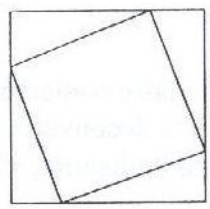


Figure 2 :



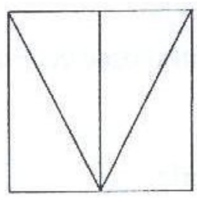
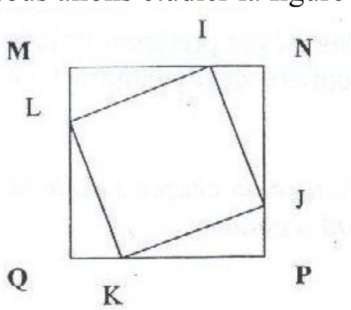


Figure 3

La figure 3 que l'on rencontre en début de recherche n'est pas un carré (côté de 5cm et 6cm)
Nous allons étudier la figure 2. après avoir nommé les sommets.



Géométriques simples

Sans doute la démonstration la plus simple, d'origine indienne (védique) et variante due au mathématicien indien Bhaskara (né vers 1114).

Démonstration algébrique :
Par la double distributivité en écrivant $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour l'aire de MNPQ et les aires des 4 triangles plus l'aire du carré

Démonstration géométriques :
Nous démontrons facilement que le grand quadrilatère est un carré par les conditions suffisante pour qu'un quadrilatère soit un carré : 4 angles droits et quatre coté égaux.
Pour démontrer que le vide au centre est un carré on peut utiliser le fait que l'angle LIJ = 90° (angles complémentaire du triangle)

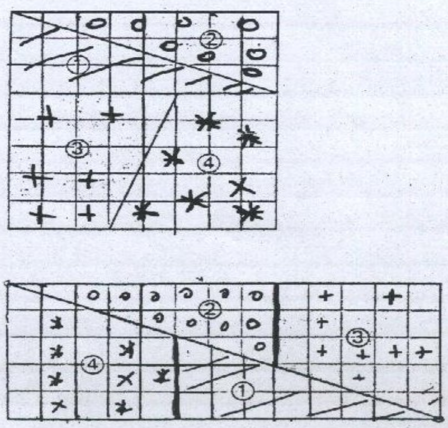
On nomme a, b et c les longueur du triangle rectangle et on écrit de plusieurs façon différentes l'aire du carré MNPQ
On peut étudier toutes les formulations et retenir enfin les deux suivantes

$$a^2+2ab+b^2 = 2ab+c^2$$

donc $a^2+b^2=c^2$

4) Étape 1: 64=65 ???

On découpe en 4 morceaux un carré de 8 sur 8. Puis on assemble les 4 morceaux pour former un rectangle de 13 sur 5.



Calculer l'aire du carré, l'aire du rectangle, et trouver l'explication de ce curieux phénomène.

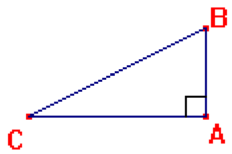
1) Triplet pythagoricien

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	6	10
9	40	41
12	16	20
13	84	85
15	8	17
16	30	34
20	48	52
21	20	29
24	10	26
24	70	74

27	36	45
32	24	40
33	56	65
35	12	37
40	42	58
45	28	53
48	14	50

2) Le théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore :
Si un triangle est rectangle alors le carré de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

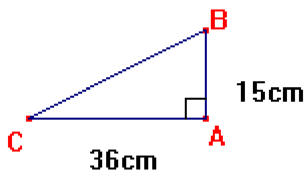


Données:
ABC est un triangle rectangle en A

Conclusion:
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

3) Exemples:

On donne le triangle BAC rectangle en A tel que AB = 15 cm et AC = 36 cm. Calculer BC.



1ère étape:

on sait que le triangle est rectangle donc on peut utiliser le théorème de Pythagore

Le triangle ABC est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore on a:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Donc

$BC^2 = 15^2 + 36^2 = 225 + 1296$

$BC^2 = 1521$

2ième étape:

On utilise la touche de la calculatrice pour trouver BC

La calculatrice affiche pour

Donc BC = = 39cm

4) Un peu d'histoire

Pythagore (en grec Πυθαγόρας / *Pythagóras*, annoncé par la « Pythie »), né vers -580 et mort vers -500, était un mathématicien, philosophe et astronome de la Grèce antique.
Pythagore, fils du Phénicien Mnésarchos, serait né à Samos, une île des Sporades (ou à Tyrrhénie, ou à Tyr, ou en Syrie) en -569 et serait mort en -475 , à plus de quatre-vingts ans.

III La réciproque du théorème de Pythagore

1) Situation 2

Tracer un triangle ABC avec AB=50mm, BC=62mm et AC=36mm

Tracer un triangle DEF avec DE=20mm, EF=52mm et FD=48mm

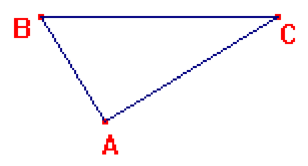
Quelles conjectures peut on faire ?

Pour ABC la contra posé de Pythagore permet de conclure

Pour DEF c'est un triangle rectangle car $52^2=20^2+48^2$

1) La réciproque

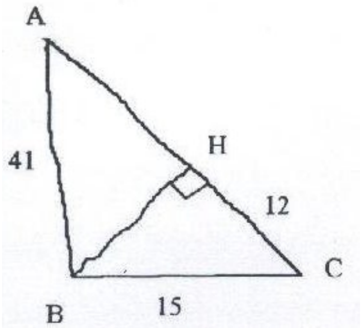
Réciproque du théorème de Pythagore
Si dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des 2 autres côtés alors ce triangle est rectangle.



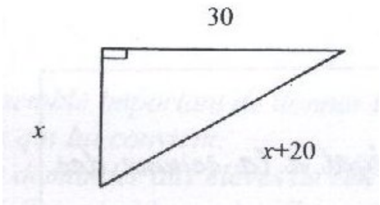
Données :
$BC^2 = AC^2 + AB^2$
Conclusion :
ABC est rectangle en A

2) Exercices

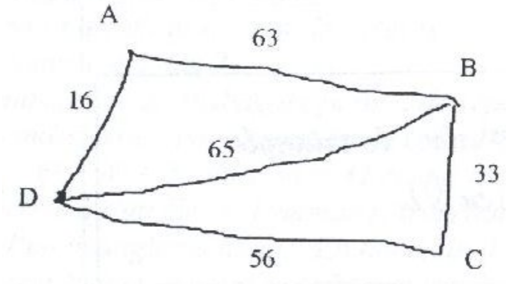
Exercice 1
Calculer l'aire du triangle ABC



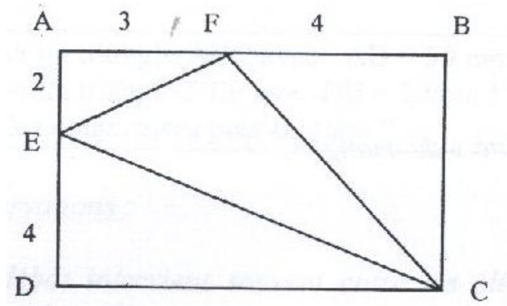
Exercice 2
Calculer la valeur de x pour que le triangle soit rectangle



Exercice 3
Prouver que ABCD sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

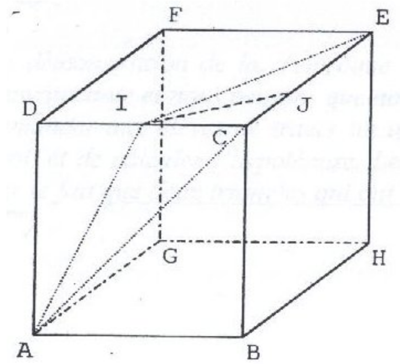


Exercice 4
ABCD est un rectangle. CEF est-il un triangle rectangle



Exercice 5
Ce solide est un cube. I est le milieu de [DC]

1) Quel est le plus court chemin A-I-E ou A-C-E
2) Quel est le plus court chemin A-I-J ou A-C-J



Exercice 6
ABCDEFGH est un pavé droit. Calculer la longueur AH dans le triangle rectangle AHC