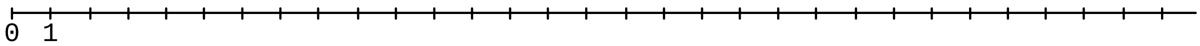
Cahier d'exercices d'arithmétique (collège)
1 - Multiples d'un entier naturel

Françoise Bastiat, Michel Bénassy, Pierre Roques
Equipe académique Mathématiques
Bordeaux, 11 juin 2001

I. Approche de la définition de multiple d'un entier naturel

6^{eme}

1) Énumérer les premiers multiples de 3.
Représenter ces nombres sur la demi-droite graduée ci-dessous :



2) Vérifier que : $3 \times 243 = 729$.
Indiquer deux façons de trouver les multiples de 3 qui précèdent et qui suivent 729.

3) Comment reconnaît-on un multiple de 10 ?
Citer deux multiples de 10 plus grands que 751.
Citer les multiples de 10 compris entre 987 et 1029.

II. Somme et différence de deux multiples d'un entier naturel

5^{eme}

1) Citer dans l'ordre croissant, trois multiples de 5 que l'on notera a, b et c.
Calculer : $a + b$; $a + c$; $b + c$; $b - a$; $c - a$ et $c - b$.
Quelle conjecture peut-on émettre ?

2) Les entiers r et s sont deux multiples de 7. Écrire r et s sous forme littérale.
Démontrer que $r + s$ est un multiple de 7.

3) La démonstration générale pourra alors être envisagée.

III. Entiers consécutifs

4^{eme}

1) Soit x un entier naturel non nul.
Donner une écriture littérale de l'entier « qui le suit », puis de l'entier « qui le précède ».

2) Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
La somme de quatre entiers consécutifs est-elle un multiple de 4 ?

3) Dans une liste de cinq entiers consécutifs, on isole le troisième.
Démontrer que la somme des quatre entiers restants est un multiple de 4.

IV. Multiples consécutifs d'un même entier naturel

3^{eme}

Terminologie : $35 = 5 \times 7$ *et* $40 = 5 \times 8$.
On dit que 35 et 40 sont deux multiples consécutifs de 5.

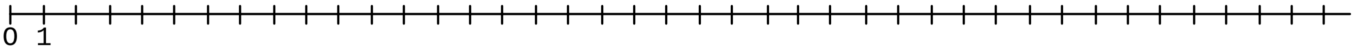
1) Démontrer que la somme de trois multiples consécutifs de 3 est un multiple de 9.

2) La somme de quatre multiples consécutifs de 7 est égale à 266.
Quels sont ces quatre entiers ?

V. Multiple d'un multiple d'un entier naturel (approche)

6^{eme}

1) Placer sur la demi-droite graduée ci-dessous, en rouge les premiers multiples de 4 et en bleu les premiers multiples de 12.



Quelle conjecture peut-on émettre ?

2) Compléter :
$12 \times 11 = ...$ donc .... est un multiple de 12
$12 \times 11 = (4 \times ....) \times 11$ donc $12 \times 11 = 4 \times (.... \times 11)$ donc $12 \times 11 = 4 \times ....$
$.......... = 4 \times ....$ donc .... est un multiple de 4.

3) Un distributeur de friandises a été rempli de bonbons extraits de sachets contenant chacun 15 bonbons. Lorsque le distributeur est vide, le marchand relève une somme d'argent correspondant à l'achat de 347 bonbons.
Ce distributeur fonctionne-t-il correctement ?

VI. Multiple d'un multiple d'un entier naturel

5^{eme}

1) L'entier r est un multiple de 12. Écrire r sous forme littérale.
En utilisant cette écriture, montrer que r est un multiple de 4.
Énoncer la propriété qui se trouve ainsi démontrée.

2) Démontrer que : « si un entier est multiple de 36, alors il est multiple de 9 ».
La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

3) La démonstration générale pourra alors être envisagée.

VII. Nombres pairs - Nombres impairs

3^{eme}

Terminologie : Examiner la parité d'un nombre entier naturel, c'est déterminer s'il est pair ou impair.

1) Donner l'écriture littérale d'un nombre pair, puis celle d'un nombre impair.

2) Étudier la parité de la somme, de la différence et du produit de deux entiers a et b ($a > b$) lorsque :
- a et b sont tous les deux pairs ;
- a et b sont tous les deux impairs ;
- a est impair et b est pair.

3) Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.
En est-il de même de la somme de deux nombres pairs consécutifs ?

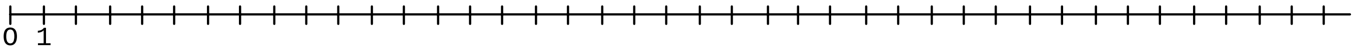
4) Démontrer que le carré d'un nombre pair est un multiple de 4.
Démontrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

5) Démontrer que la différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs est un entier impair.
Calculer mentalement : $987^2 - 986^2$.

VIII. *Multiples communs à deux entiers naturels*

6^{eme}

1) Placer sur la demi-droite graduée ci-dessous, en rouge les premiers multiples de 6 et en bleu les premiers multiples de 9.



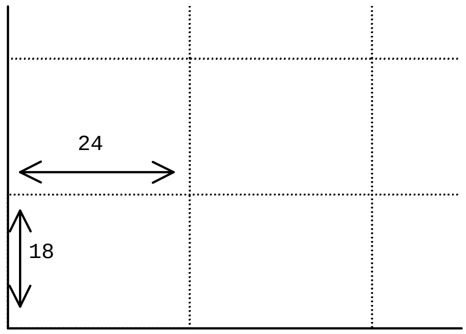
Écrire la liste des premiers multiples communs à 6 et 9 obtenus grâce au schéma ci-dessus. Compléter la liste pour obtenir les quatre premiers multiples communs à 6 et 9.

2) Déterminer le plus petit multiple commun non nul à 6 et 15.
Déterminer le plus petit multiple commun non nul à 5 et 15.

3) Alain dispose d'une feuille rectangulaire de papier réglé dont on a reproduit un morceau sur le dessin ci-contre.

Alain souhaite découper un carré dans cette feuille en suivant les lignes pointillées.

Sachant que les dimensions de la feuille sont (en mm) 216 et 168, déterminer :
- la longueur du côté du « plus petit carré »,
- puis la longueur du côté du « plus grand carré » qu'Alain peut ainsi découper dans la feuille.



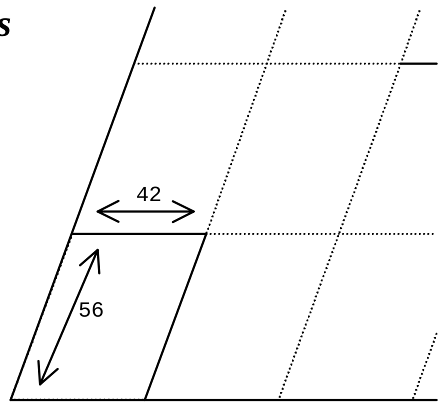
IX. *Multiples communs à deux entiers naturels*

5^{eme}

1) Au centre d'une place, on veut réaliser un losange décoratif en assemblant des carreaux en forme de parallélogrammes comme l'indique le schéma ci-contre .

Les mesures de longueurs sont exprimées en centimètres.

Sachant que l'on dispose au plus de 120 carreaux, déterminer toutes les longueurs possibles pour le côté du losange.



2) Dans un institut d'étude des langues européennes, aucune section ne compte plus de 150 étudiants et la section « Italien » est moins nombreuse que la section « Allemand ».
Le directeur des études observe que si chacune de ces deux sections comptait cinq étudiants de plus, il pourrait constituer, dans l'une comme dans l'autre, aussi bien un nombre entier de groupes de huit étudiants qu'un nombre entier de groupes de sept étudiants.

Combien les sections « Italien » et « Allemand » comptent-elles d'étudiants ?

X. *Multiples communs à deux (ou plusieurs) entiers naturels*

4^{eme}

1) Déterminer le plus petit multiple commun (non nul) à 4, 6 et 10.
Utiliser le résultat précédent pour calculer : $\frac{5}{4}+\frac{7}{6}+\frac{1}{10}$.

2) Calculer : $\frac{1}{36}+\frac{1}{24}+\frac{1}{27}$.