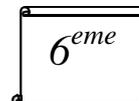


Cahier d'exercices d'arithmétique (collège)

2 - Diviseurs d'un entier naturel

Françoise Bastiat, Michel Bénassy, Pierre Roques
Equipe académique Mathématiques
Bordeaux, 11 juin 2001

I. Approche de la définition de diviseur d'un entier naturel



- 1) Compléter : $12 \times 7 = \dots$; $12 = 4 \times \dots$.

En utilisant uniquement les cinq nombres figurant dans les calculs ci-dessus, compléter :
 \dots est un multiple de 12 ; 12 est un diviseur de \dots ;
 \dots et \dots sont des diviseurs de 12 .

- 2) Vérifier que : $31 \times 37 = 1147$. Sans poser d'opération, compléter :
 $62 \times 74 = \dots$; $4 \times \dots = 4588$; $31 \times \dots = 4588$.

En déduire :

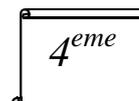
- un multiple de 74 ;
- un multiple de 31.
- un diviseur de 4588 inférieur à 100.
- un diviseur de 4588 supérieur à 100.
- un diviseur impair de 4588.

II. Ensemble des diviseurs d'un entier naturel (approche)



- 1) Rechercher toutes les façons possibles d'écrire 20 sous la forme du produit de deux entiers naturels. En déduire la liste de tous les diviseurs de 20.
- 2) Établir :
- la liste des diviseurs de 60 ;
 - la liste des diviseurs de 49 ;
 - la liste des diviseurs de 13.

III. Ensemble des diviseurs d'un entier naturel



- 1) Établir la liste des seize diviseurs de 216.
- 2) Citer :
- un entier naturel qui a exactement quatre diviseurs et préciser ces diviseurs ;
 - un entier naturel qui a exactement trois diviseurs et préciser ces diviseurs.

- 3) L'entier naturel 7 a pour seuls diviseurs 1 et 7.

Terminologie : On appelle nombre premier un nombre entier naturel qui possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Le nombre 7 est donc un entier naturel premier.

Citer plusieurs entiers naturels premiers.

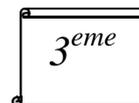
- 4) Les diviseurs de l'entier naturel 6 sont : 1, 2, 3 et 6. On remarque : $1 + 2 + 3 = 6$.

Terminologie : On appelle nombre parfait un nombre entier naturel qui est égal à la somme de tous ses diviseurs autres que lui-même.

Le nombre 6 est donc un nombre parfait.

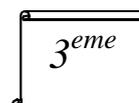
Les entiers naturels 15, 28 et 496 sont-ils des nombres parfaits ?

IV. Propriétés des diviseurs d'un (ou de plusieurs) entier(s) naturel(s)



- 1) Vérifier que : $39 \times 16 = 324$.
En déduire, sans poser d'opération, que 4 et 13 sont des diviseurs de 324.
- 2) L'entier 13 est-il un diviseur de la somme $26000 + 13$?
L'entier 12 est-il un diviseur de la différence $144 \times 10^5 - 240$?
- 3) Démontrer que :
« si un entier naturel est un diviseur commun à deux entiers, alors il est aussi un diviseur de leur somme ».
La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

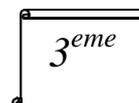
V. Recherche de diviseurs d'entiers naturels



Placer dans les neuf cases du tableau ci-contre les nombres entiers de 1 à 9 de façon à ce que les produits des trois facteurs de chaque ligne et de chaque colonne soient égaux aux nombres indiqués.

				54
				160
				42
56	90	72		

VI. Curiosités



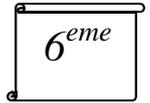
Rappels: écriture d'un nombre entier naturel en système décimal.

Exemples : 3 456 est l'écriture décimale du nombre : $1\,000 \times 3 + 100 \times 4 + 10 \times 5 + 1 \times 6$;
22 079 est l'écriture décimale du nombre : $10\,000 \times 2 + 1\,000 \times 2 + 10 \times 7 + 1 \times 9$.

Notation : a, b, c et d désignant des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 et a étant de plus non nul,
 \overline{abcd} est l'écriture décimale du nombre : $1\,000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + 1 \times d$.

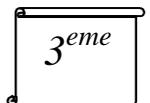
- 1) Calculer : $13 \times 11 \times 7 = \dots\dots\dots$.
Compléter : $325\,325 = 325 \times \dots\dots\dots$.
En déduire, sans poser d'opération, que : 13, 77 et 143 sont des diviseurs de 325 325.
Proposer d'autres nombres de six chiffres divisibles par 13, 77 et 143.
- 2) Démontrer que 1 001 est un diviseur de tout entier du type : \overline{abcabc} .
En déduire que 91 est un diviseur de tout entier du type : \overline{abcabc} .
- 3) Trouver un diviseur de cinq chiffres de tout nombre du type : \overline{ababab} (tels 121212 ou 737373).
En déduire d'autres diviseurs de tout nombre du type : \overline{ababab} .

VII. Utilisation des critères de divisibilité



- 1) Trouver le chiffre manquant pour que l'entier $1\ 4\ 2\ \square$ soit divisible par 3 et 5.
Est-il alors divisible par 9 ?
- 2) Avec les chiffres 1, 5 et 8 composer un nombre de trois chiffres divisible par 2 et par 7.
- 3) Quel est le plus petit entier divisible par 3 dont l'écriture ne comporte que le chiffre 9 ?
Quel est le plus petit entier divisible par 9 dont l'écriture ne comporte que le chiffre 3 ?
- 4) Quel est le plus grand entier divisible par 2, par 3 et par 5 dont l'écriture comporte exactement quatre chiffres tous différents ?
Quel est le plus petit entier divisible par 9, non divisible par 2, non divisible par 5, dont l'écriture comporte trois chiffres tous différents ?
- 5) Parmi les entiers : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, trouver ceux qui ont un ou plusieurs multiples s'écrivant uniquement avec le chiffre 1.

VIII. Critères de divisibilité



Terminologie : p désignant un entier naturel non nul, un « critère de divisibilité par p » est une propriété caractéristique des entiers naturels qui sont divisibles par p .

Exemple : critère de divisibilité par 10 :

- Si un nombre entier est divisible par 10, alors, dans son écriture en système décimal, le chiffre des unités est 0.
- Si, dans l'écriture en système décimal d'un nombre entier, le chiffre des unités est 0, alors ce nombre est divisible par 10.

1) Divisibilité par 2 et divisibilité par 5

Observation : $12\ 568 = \underline{1\ 256} \times 10 + 8$.

▼
multiple de 2 et de 5

Critères : Rappeler le critère de divisibilité par 2, puis le critère de divisibilité par 5, connus depuis la classe de Sixième.

Justification : En écrivant un nombre entier naturel n sous la forme : $n = 10 \times d + u$, justifier les critères énoncés.

2) Divisibilité par 4 et divisibilité par 25

Observation : $53\ 724 = \underline{537} \times 100 + 24 = \underline{537} \times 4 \times 25 + 24$.

▼
multiple de 4 et de 25

Critères : Énoncer un critère de divisibilité par 4, puis un critère de divisibilité par 25.

Justification : En écrivant un nombre entier naturel n sous la forme : $n = 100 \times c + 10 \times d + u$, justifier les critères énoncés.

3) Divisibilité par 8 et divisibilité par 125

Observation : $1\ 000 = 8 \times 125$.

Critères : Énoncer un critère de divisibilité par 8, puis un critère de divisibilité par 125.

Justification : Démontrer les critères énoncés.

