Cahier d'exercices d'arithmétique (collège)
5 - Nombres premiers entre eux

Françoise Bastiat, Michel Bénassy, Pierre Roques
Equipe académique Mathématiques
Bordeaux, 11 juin 2001

I. Application directe de la définition

3^{eme}

1) Les nombres entiers suivants sont-ils ou non premiers entre eux :
   4 et 15 ; 396 et 1144 ; 45 et 94 ; 49 et 721 ; 26 et 143 ; 249 et 508 ; 123 et 45^2 ; 452 et 2037 ?
   Recenser les principes mis en œuvre pour reconnaître si deux nombres entiers sont ou non premiers entre eux.

2) Citer deux nombres entiers compris entre 20 et 50 premiers entre eux.
   Citer deux nombres entiers plus grands que 1000 non premiers entre eux.

3) Peut-on trouver deux nombres pairs premiers entre eux ?
   Peut-on trouver deux nombres impairs premiers entre eux ?
   Peut-on trouver deux nombres impairs non premiers entre eux ?

4) Établir la liste des nombres entiers inférieurs à n et premiers avec n pour : $n = 11$; $n = 15$; $n = 28$.

II. Caractérisation du PGCD de deux entiers naturels

3^{eme}

1) Par quel nombre entier doit-on diviser 264 et 110 pour obtenir deux quotients entiers premiers entre eux ?

2) Trouver deux nombres entiers, l'un plus petit que 1000, l'autre plus grand que 10000, ayant pour PGCD : 258.

3) Le PGCD de deux nombres entiers est 24.
   Le plus grand des deux est 144.
   Le plus petit des deux n'est pas 24. Quel est-il donc ?

4) Déterminer tous les couples de nombres entiers naturels (a, b), où $a \leq b$, qui admettent :
   - pour somme : 168,
   - et pour PGCD : 12.

5) Déterminer tous les couples de nombres entiers naturels (m, n), où $m \leq n$, qui admettent :
   - pour produit : 2160,
   - et pour PGCD : 6.

III. Un peu plus théorique …

3^{eme}

1) Calculer le PGCD de 45 et 46, puis le PGCD de 200 et 201.

   Démontrer que deux entiers naturels consécutifs sont premiers entre eux.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n :
   - n et $2n+1$ sont premiers entre eux ;
   - $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

   En utilisant ces résultats, proposer des couples d'entiers naturels premiers entre eux.

3) Démontrer que si les entiers naturels m et n sont premiers entre eux, alors m et $m+n$ sont premiers entre eux.
   En utilisant ce résultat, proposer des couples d'entiers naturels premiers entre eux.

4) Dans son « Liber abaci », Léonard de Pise (dit Fibonacci ; 1180-1250) étudie une suite de nombres entiers qui porte désormais son nom.

La suite de Fibonacci est définie de la façon suivante :
- elle a pour premier terme : $a_1 = 1$,
- elle a pour deuxième terme : $a_2 = 1$,
- puis chaque terme est obtenu comme somme des deux termes précédents (ex : $a_3 = 2$).

Compléter le tableau suivant jusqu'au dixième terme de la suite :

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	…
1	1									

Démontrer que, jusqu'au dixième terme de la suite, deux termes consécutifs sont premiers entre eux.
Le résultat est-il vrai au-delà du dixième terme ?

5) Démontrer que si deux entiers naturels sont premiers entre eux, alors tout diviseur de l'un est premier avec l'autre.

6) Démontrer que si les carrés de deux entiers naturels sont premiers entre eux, alors ces entiers sont premiers entre eux.

IV. Introduction à un théorème (*) de divisibilité

3^{eme}

1) Tout multiple de 60 est multiple de 6 et de 10.
La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

2) Tout multiple de 12 est multiple de 3 et de 4.
On se propose d'examiner la réciproque de cette propriété.

- Établir la liste des multiples de 3 inférieurs à 50,
puis la liste des multiples de 4 inférieurs à 50,
enfin, la liste des multiples communs à 3 et 4 inférieurs à 50.
Peut-on trouver un nombre entier inférieur à 50, divisible par 3 et par 4, qui ne soit pas divisible par 12 ?

- Soit n un entier naturel non nul, divisible par 3 et par 4 :
$n = 3 \times k$ et $n = 4 \times k'$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, $k' \in \mathbb{N}^*$ et $k > k'$.
Démontrer que n est divisible par 12.
Indication : observer que $n = (4-3) \times n$ d'où …

(*) Théorème :
Si un entier naturel non nul est divisible par deux entiers naturels premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit.

……

V. En « remontant » les algorithmes

Cette activité suppose l'étude préalable de l'exercice IV du Chapitre : « Diviseurs communs à deux entiers. PGCD ».

Démontrer que les nombres 55 et 23 sont premiers entre eux.

Exprimer le nombre 1 sous la forme : $1 = l \times 55 + m \times 23$, où l et m sont deux entiers relatifs ;
- en « remontant » l'algorithme des différences ;
- en « remontant » l'algorithme d'Euclide.