

# Cahier d'exercices d'arithmétique (collège)

## 5 - Nombres premiers entre eux

Françoise Bastiat, Michel Bénassy, Pierre Roques  
Equipe académique Mathématiques  
Bordeaux, 11 juin 2001

3<sup>eme</sup>

### I. Application directe de la définition

- 1) Les nombres entiers suivants sont-ils ou non premiers entre eux :  
4 et 15 ; 396 et 1144 ; 45 et 94 ; 49 et 721 ; 26 et 143 ; 249 et 508 ; 123 et  $45^2$  ; 452 et 2037 ?  
Recenser les principes mis en œuvre pour reconnaître si deux nombres entiers sont ou non premiers entre eux.
- 2) Citer deux nombres entiers compris entre 20 et 50 premiers entre eux.  
Citer deux nombres entiers plus grands que 1000 non premiers entre eux.
- 3) Peut-on trouver deux nombres pairs premiers entre eux ?  
Peut-on trouver deux nombres impairs premiers entre eux ?  
Peut-on trouver deux nombres impairs non premiers entre eux ?
- 4) Établir la liste des nombres entiers inférieurs à  $n$  et premiers avec  $n$  pour :  $n = 11$  ;  $n = 15$  ;  $n = 28$ .

3<sup>eme</sup>

### II. Caractérisation du PGCD de deux entiers naturels

- 1) Par quel nombre entier doit-on diviser 264 et 110 pour obtenir deux quotients entiers premiers entre eux ?
- 2) Trouver deux nombres entiers, l'un plus petit que 1000, l'autre plus grand que 10000, ayant pour PGCD : 258.
- 3) Le PGCD de deux nombres entiers est 24.  
Le plus grand des deux est 144.  
Le plus petit des deux n'est pas 24. Quel est-il donc ?
- 4) Déterminer tous les couples de nombres entiers naturels  $(a, b)$ , où  $a \leq b$ , qui admettent :
  - pour somme : 168,
  - et pour PGCD : 12.
- 5) Déterminer tous les couples de nombres entiers naturels  $(m, n)$ , où  $m \leq n$ , qui admettent :
  - pour produit : 2160,
  - et pour PGCD : 6.

3<sup>eme</sup>

### III. Un peu plus théorique ...

- 1) Calculer le PGCD de 45 et 46, puis le PGCD de 200 et 201.  
Démontrer que deux entiers naturels consécutifs sont premiers entre eux.
- 2) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :
  - $n$  et  $2n+1$  sont premiers entre eux ;
  - $n+1$  et  $2n+1$  sont premiers entre eux.En utilisant ces résultats, proposer des couples d'entiers naturels premiers entre eux.
- 3) Démontrer que si les entiers naturels  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux, alors  $m$  et  $m+n$  sont premiers entre eux.  
En utilisant ce résultat, proposer des couples d'entiers naturels premiers entre eux.

- 4) Dans son « Liber abaci », Léonard de Pise (dit Fibonacci ; 1180-1250) étudie une suite de nombres entiers qui porte désormais son nom.

La suite de Fibonacci est définie de la façon suivante :

- elle a pour premier terme :  $a_1 = 1$ ,
- elle a pour deuxième terme :  $a_2 = 1$ ,
- puis chaque terme est obtenu comme somme des deux termes précédents (ex :  $a_3 = 2$ ).

Compléter le tableau suivant jusqu'au dixième terme de la suite :

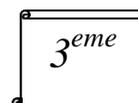
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	...
1	1									

Démontrer que, jusqu'au dixième terme de la suite, deux termes consécutifs sont premiers entre eux.

Le résultat est-il vrai au-delà du dixième terme ?

- 5) Démontrer que si deux entiers naturels sont premiers entre eux, alors tout diviseur de l'un est premier avec l'autre.
- 6) Démontrer que si les carrés de deux entiers naturels sont premiers entre eux, alors ces entiers sont premiers entre eux.

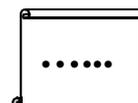
#### IV. Introduction à un théorème (\*) de divisibilité



- 1) Tout multiple de 60 est multiple de 6 et de 10.  
La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?
- 2) Tout multiple de 12 est multiple de 3 et de 4.  
On se propose d'examiner la réciproque de cette propriété.
- Établir la liste des multiples de 3 inférieurs à 50, puis la liste des multiples de 4 inférieurs à 50, enfin, la liste des multiples communs à 3 et 4 inférieurs à 50.  
Peut-on trouver un nombre entier inférieur à 50, divisible par 3 et par 4, qui ne soit pas divisible par 12 ?
  - Soit  $n$  un entier naturel non nul, divisible par 3 et par 4 :  
 $n = 3 \times k$  et  $n = 4 \times k'$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $k' \in \mathbb{N}^*$  et  $k > k'$ .  
Démontrer que  $n$  est divisible par 12.  
Indication : observer que  $n = (4 - 3) \times n$  d'où ...

(\*) **Théorème :**

*Si un entier naturel non nul est divisible par deux entiers naturels premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit.*



#### V. En « remontant » les algorithmes

Cette activité suppose l'étude préalable de l'exercice IV du Chapitre : « Diviseurs communs à deux entiers. PGCD ».

Démontrer que les nombres 55 et 23 sont premiers entre eux.

Exprimer le nombre 1 sous la forme :  $1 = l \times 55 + m \times 23$ , où  $l$  et  $m$  sont deux entiers relatifs ;

- en « remontant » l'algorithme des différences ;
- en « remontant » l'algorithme d'Euclide.