Cahier d'exercices d'arithmétique (collège)
6 - Fractions irréductibles

Françoise Bastiat, Michel Bénassy, Pierre Roques
Equipe académique Mathématiques
Bordeaux, 11 juin 2001

La notion de fraction irréductible n'apparaît qu'en classe de troisième.

Les paragraphes I, II, III, proposent quelques activités autour des fractions dans les classes de sixième, cinquième et quatrième.
Ne prétendant ni à l'originalité, ni à l'exhaustivité, ces exercices ont pour objectif de situer brièvement les compétences attendues selon les niveaux sur les fractions.

6^{eme}

I. Écritures fractionnaires d'un nombre

1) Compléter : $1{,}3 = \frac{\dots\dots}{10} = \frac{\dots\dots}{100} = \frac{1300}{\dots\dots}$.

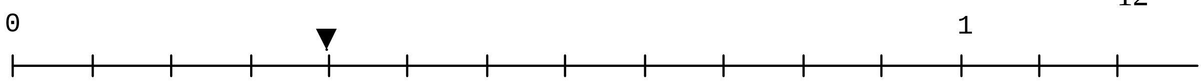
2) Représenter chacun des nombres décimaux suivants : 0,73 ; 12,7 ; 0,0029 ; 9,001
par une fraction de dénominateur 10 ou 100 ou 1000 ou 10000 et de numérateur entier.

Effectuer la somme : 0,73 + 12,7 + 0,0029 + 9,001 ;
- en utilisant les écritures décimales,
- puis en utilisant les écritures fractionnaires les plus appropriées.

3) Relever, parmi les nombres suivants, ceux qui sont des nombres décimaux :

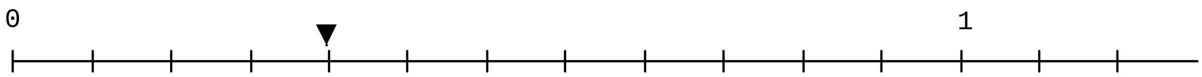
$\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{21}{12}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{222}{50}$; $\frac{456}{200}$; $\frac{62}{80}$; $\frac{40}{875}$; $\frac{490}{875}$

4) Sur une demi-droite graduée, on a repéré le nombre dont une écriture fractionnaire est $\frac{4}{12}$:



Vérifier l'égalité : $\frac{4}{12} = \frac{2}{6}$ en repassant en rouge certains tirets de la graduation.

En procédant de même …



… compléter l'égalité : $\frac{4}{12} = \frac{1}{\dots}$.

5) Compléter : $2{,}25 = \frac{\dots}{4} = \frac{27}{\dots} = \frac{\dots}{20}$.

II. Simplification de fractions, opérations, comparaison de nombres

5^{eme}

1) Compléter : $\frac{15}{25} = \frac{......}{5}$; $\frac{33}{132} = \frac{1}{.....}$; $\frac{36}{63} = \frac{.....}{7}$.

2) Simplifier les fractions suivantes : $\frac{24}{60}$; $\frac{60}{165}$; $\frac{175}{245}$.

3) Trouver la fraction de dénominateur 20 représentant le même nombre que la fraction : $\frac{21}{28}$.

   Trouver la fraction de numérateur 75 représentant le nombre décimal : 1,25.

4) Effectuer et simplifier si possible le résultat : $\frac{7}{24}+\frac{3}{8}$; $\frac{1}{11}-\frac{3}{154}$; $\frac{10}{35}-\frac{3}{14}$.

5) Comparer les nombres suivants : $\frac{7}{21}$ et $\frac{13}{36}$; $1,3$ et $\frac{37}{30}$; $2,25$ et $\frac{25}{12}$.

III. Opérations, simplification de fractions

4^{eme}

Effectuer les calculs et si c'est possible, simplifier les résultats :

$\frac{7}{30}+\frac{2}{45}+\frac{45}{50}$; $\frac{37}{90}-\frac{11}{60}$; $\frac{17}{30}\times\frac{15}{34}\times\frac{1}{4}$; $\frac{26}{45}:\frac{39}{30}$.

IV. Approche de la notion de fraction irréductible

3^{eme}

1) Peut on simplifier les fractions suivantes ?

   $\frac{14}{45}$; $\frac{102}{254}$; $\frac{56}{15}$; $\frac{176}{77}$; $\frac{63^2}{51^3}$; $\frac{595}{296}$

   Caractériser les fractions qui n'ont pas pu être simplifiées.

2) Déterminer toutes les écritures fractionnaires du nombre $\frac{110}{264}$ obtenues par simplification.

   Expliciter le procédé mis en œuvre.

V. Application directe de la définition d'une fraction irréductible

3^{eme}

Les fractions suivantes sont-elles irréductibles ?

$\frac{12}{45}$; $\frac{58}{15}$; $\frac{24}{245}$; $\frac{51}{85}$; $\frac{12361}{12362}$; $\frac{527}{143}$; $\frac{185}{703}$

VI. D'une fraction à une fraction irréductible

3^{eme}

1) Déterminer l'écriture fractionnaire irréductible du nombre $A = \frac{336}{1260}$

   en observant la démarche indiquée :

   - effectuer des simplifications successives de la fraction donnée par des diviseurs communs au numérateur et au dénominateur ;
   - démontrer que le numérateur et le dénominateur de la « dernière » fraction obtenue sont premiers entre eux.

2) Déterminer l'écriture fractionnaire irréductible du nombre $B = \frac{1358}{630}$

   en observant la démarche indiquée :

   - calculer le PGCD du numérateur et du dénominateur de la fraction donnée ;
   - simplifier la fraction donnée par ce PGCD ;
   - justifier, en se référant à une propriété établie en cours, que le numérateur et le dénominateur de la fraction ainsi simplifiée sont premiers entre eux.

3) Déterminer l'écriture fractionnaire irréductible des nombres suivants :

   $A = \frac{45}{60}$; $B = \frac{636}{248}$; $C = \frac{209}{348}$; $D = \frac{884}{357}$.

VII. Recherche de diverses écritures fractionnaires d'un même nombre

3^{eme}

1) a. Démontrer que les fractions $\frac{16}{12}$; $\frac{36}{27}$ et $\frac{48}{36}$ représentent le même nombre A dont on précisera l'écriture fractionnaire irréductible.

   Recenser les principes qui peuvent être mis en œuvre pour établir l'égalité de deux fractions.

   b. Peut-on trouver une écriture fractionnaire du nombre A telle que :

   - le dénominateur soit égal à 21 ?
   - le dénominateur soit égal à 353 ?
   - le numérateur soit un multiple de 5 ?
   - le numérateur et le dénominateur aient pour PGCD 22 ?

2) Déterminer toutes les fractions représentant le nombre $B = \frac{48}{180}$, ayant un dénominateur compris entre 300 et 350.

3) a. Un dessin a été réalisé sur une feuille de papier rectangulaire dont la longueur est égale à 45 cm.
   Pour obtenir un agrandissement de ce dessin, on a dû adopter une feuille de papier mesurant 18 cm de plus en longueur et 16 cm de plus en largeur.
   Quelles sont les dimensions des deux feuilles de papier utilisées ?

   b. Vérifier que les fractions $\frac{24}{27}$; $\frac{64}{72}$ et $\frac{24+64}{27+72}$ représentent un même nombre.

   c. Soit $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ deux fractions représentant le même nombre r.

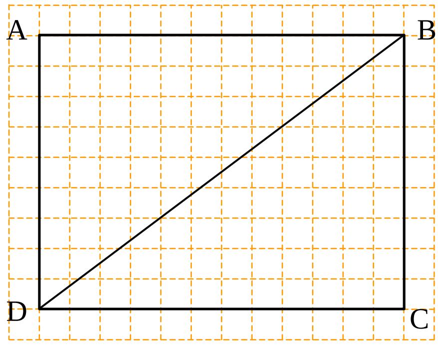
   Démontrer que la fraction $\frac{a+a'}{b+b'}$ représente aussi le nombre r.

VIII. Arithmétique géométrique …

3^{eme}

1) Le rectangle *ABCD* a ses sommets sur les nœuds d'un quadrillage.

   En choisissant comme unité la longueur du côté d'un carré du quadrillage, on a : $AB = 12$ et $BC = 9$.
   La diagonale [*BD*] passe par deux autres nœuds du quadrillage, soit quatre au total.



   Par combien de nœuds du quadrillage passe la diagonale [*B'D'*] du rectangle *A'B'C'D'* tel que :
   $A'B' = 60$ et $B'C' = 72$?

2) Représenter (sur papier quadrillé 5×5) la fonction :

   $x \longrightarrow \dfrac{8}{7}x$ pour $0 \le x \le 28$.

   Indiquer, sur ce graphique, les points du segment tracé dont les coordonnées sont des nombres entiers.

   Utiliser les résultats trouvés pour traiter l'exercice IX.2 du Chapitre : Multiples d'un entier naturel.

IX. Exclus de l'ensemble des nombres rationnels …

3^{eme}

Terminologie : On appelle « nombre rationnel » un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ *où* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $b \in \mathbb{N}^*$.

Exemples : $\dfrac{7}{3}$; 5 et $\dfrac{-12}{20}$ *sont des nombres rationnels.*

1) a. Démontrer que le carré d'un nombre pair est un nombre pair.
   Démontrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.
   En déduire que si le carré d'un entier naturel est un nombre pair, alors cet entier naturel est lui-même un nombre pair.

   b. On se propose de démontrer (par l'absurde) que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel (*).

   On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, et l'on note $\dfrac{p}{q}$ son écriture fractionnaire irréductible : $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels premiers entre eux.
   Montrer que p^2 est un nombre pair ; en déduire que p est un nombre pair.
   Montrer alors que q^2 est un nombre pair ; en déduire que q est un nombre pair.
   Conclure.

   (*) *On pourra trouver dans le quinzième numéro du bulletin académique* ***Réciproques*** *une démonstration moins conventionnelle de l'irrationalité de* $\sqrt{2}$.

2) a. Démontrer que le carré d'un multiple de 3 est un multiple de 3.
   Démontrer que si un entier naturel n'est pas un multiple de 3, alors son carré n'est pas un multiple de 3.
   En déduire que si le carré d'un entier naturel est un multiple de 3, alors cet entier naturel est lui-même un multiple de 3.

   b. En s'inspirant de la démarche décrite pour le nombre $\sqrt{2}$, démontrer (par l'absurde) que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.