VIII – Problèmes de synthèse

L'IMAGE DU PRODUIT

Objectif	*Caractériser les solutions d'une équation fonctionnelle classique.*
Outils	*Dérivabilité. Dérivabilité de la fonction composée. Notion de primitive.*

Caractériser les fonctions vérifiant la relation $f(xy) = f(x) + f(y)$.

A. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et vérifiant : « pour tous réels x et y, $f(xy) = f(x) + f(y)$ ».
Montrer que $f(0) = 0$ et que f est la fonction nulle.

B. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0 + \infty[$ et vérifiant : « pour tous réels x et y, $f(xy) = f(x) + f(y)$ ».

1. Montrer que $f(1) = 0$.
2. Soit $y \in]0 + \infty[$, y fixé.
   Montrer que les fonctions $h : x \mapsto f(x) + f(y)$ et $g : x \mapsto f(xy)$ sont dérivables sur $]0 + \infty[$ et que, pour tout $x \in]0 + \infty[$, $y f'(xy) = f'(x)$.
3. En déduire que, pour tout $y \in]0 + \infty[$, $f'(y) = \dfrac{f'(1)}{y}$ (prendre $x = 1$).

Conclusion : En posant $k = f'(1)$, on a : pour tout $y \in]0 + \infty[$, $f'(y) = \dfrac{k}{y}$. Autrement dit, f est la primitive sur $]0 + \infty[$ de la fonction $y \mapsto \dfrac{k}{y}$ qui s'annule en 1.

C. Réciproquement, soit k un réel et f une fonction définie et dérivable sur $]0 + \infty[$ telle que $f(1) = 0$ et, pour tout $x \in]0 + \infty[$, $f'(x) = \dfrac{k}{x}$.

1. Soit $y \in]0 + \infty[$, y fixé. Montrer que les fonctions f et $h : x \mapsto f(xy)$ ont la même dérivée.
2. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout $x \in]0 + \infty[$, $f(xy) = f(x) + C$.
3. Montrer que $C = f(y)$.

Conclusion : La primitive, sur $]0 + \infty[$, de $x \mapsto \dfrac{k}{x}$ qui s'annule en 1 vérifie : pour tous réels x et y de $]0 + \infty[$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

MOI, MON DOUBLE ET SON IMAGE

Objectif	*Utiliser la continuité et la dérivabilité pour résoudre des équations fonctionnelles*
Outils	*Continuité et dérivabilité d'une fonction en un point.* *Raisonnement par récurrence*

Il s'agit de rechercher, d'une part, les fonctions vérifiant $f(2x) = f(x)$ et, d'autre part, celles vérifiant $f(2x) = 2\ f(x)$.

A. Étude des fonctions vérifiant $f(2x) = f(x)$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la condition : (*).quel que soit le réel x, $f(2x) = f(x)$

1. Pour cette question seulement, on suppose de plus que, quel que soit le réel x de $[\ 1\ ;\ 2\ [$, $f(x) = x$.
   a. Calculer $f(2)$, $f(4)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{4})$, $f(\frac{1}{8})$, $f(\frac{3}{2})$, $f(\frac{3}{4})$, $f(3)$.
   b. Représenter f sur l'intervalle $[\ 1\ ;\ 2\ [$.
   En déduire la représentation de f sur les intervalles $[\ 2\ ;4\ [$; $\left[\ \frac{1}{2};1\right[$; $\left[\ \frac{1}{4};\frac{1}{2}\right[$.
   c. Donner l'allure de la représentation graphique de f dans le cas où f est impaire.
   d. Calculer $f(0{,}01)$ et $f(100)$.

2. Il s'agit ici de montrer que, si on connaît f sur $[\ 1\ ;\ 2\ [$, alors on connaît f sur $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.
   a. Montrer que, quel que soit p appartenant à $\mathbb{Z}$, $f(2^p) = f(1)$.
   b. Montrer que, quel que soit le réel x et quel que soit l'entier relatif p, $f(x) = f(2^p x)$
   c. Soit x un réel de l'intervalle $]\ 1\ ;\ +\infty\ [$ et soit p l'entier naturel tel que $2^p \leq x < 2^{p+1}$
   Montrer que : $2^{-p}x$ appartient à l'intervalle $[\ 1\ ;\ 2\ [$. En déduire que $f(x)$ est connu.
   d. Étudier le cas où $x \in\ ]\ 0\ ;\ 1\ [$.

3. On suppose dans cette question que f est continue en 0.
   Montrer que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et quel que soit $p \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^p}\right)$.
   En déduire que $f(x) = f(0)$ pour tout réel x.
   Conclure.

B. Étude des fonctions vérifiant $f(2x) = 2f(x)$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la condition : (**) quel que soit le réel x, $f(2x) = 2f(x)$

On peut remarquer que les fonctions linéaires vérifient cette relation.

1. Déterminer $f(0)$.

2. a. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et $M(x ; y)$ un point de $\mathcal{C}$. Montrer que le point M', transformé de M par l'homothétie de centre O et de rapport 2, est aussi sur $\mathcal{C}$.

   b. On suppose que, quel que soit $x \in [\,1 ; 2\,[$, $f(x) = 2 - x$
   Tracer alors la représentation graphique de f.

   c. On suppose que, quel que soit $x \in [\,1 ; 2\,[$, $f(x) = \frac{3}{5}x$.
   Tracer alors la représentation graphique de f sur $[\,0 ; +\infty\,[$.

3. On suppose maintenant que f est dérivable en 0. Montrer que :

   a. quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = 2^n f(\frac{x}{2^n})$.

   b. quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x \dfrac{f(\frac{x}{2^n}) - f(0)}{\frac{x}{2^n}}$.

   En déduire que, quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x f'(0)$, puis que f est linéaire.

4. Application
   Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g''(0)$ existe et vérifiant la condition :
   quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g(2x) = 4g(x)$.

   a. Montrer que $g(0) = 0$.

   b. Montrer que g' vérifie la condition (**).

   c. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta$

   d. Montrer que $\beta = 0$ et donner toutes les fonctions vérifiant les conditions imposées.

CARRÉ DE L'IMAGE = IMAGE DU CARRÉ

Objectif	*Résoudre une équation fonctionnelle.*
Outils	*Raisonnement par récurrence. Fonction logarithme népérien. Fonctions puissances et leurs propriétés (en particulier x^{α} est définie en 0 pour $a > 0$*

Trouver les fonctions définies continues sur $\mathbf{R}^+$, dérivables sur $\mathbf{R}^{+*}$, de dérivée continue en 1 et telles que l'image du carré de chaque réel positif soit égale au carré de l'image de ce réel.

Propriétés : $\begin{cases} (1) & \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^+, \quad f\left(x^2\right) = \left(f(x)\right)^2 \\ (2) & f \text{ est continue sur } \mathbf{R}^+, \text{ dérivable sur } \mathbf{R}^{+*} \\ (3) & f' \text{ est continue en } 1 \end{cases}$

Questions

1. a. Quelles sont les fonctions constantes solutions du problème ?

   b. Montrer que les fonctions $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$ sont solutions du problème.

   c. Soit la fonction h définie sur $\mathbf{R}^+$ par $\begin{cases} h(x) = x^2 & \text{pour tout } x \in [\,0\,;1\,] \\ h(x) = \sqrt{x} & \text{pour tout } x \in [\,1\,;+\infty\,[\end{cases}$

   Montrer que h vérifie les propriétés (1) et (2) mais pas la propriété (3).

2. a. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a : $f(x) \geq 0$.

   b. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$ et $f(1)$?

3. Démontrer que :

   a. pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $f(x^4) = [\,f(x)]^4$

   b. pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = [\,f(x)]^{\frac{1}{2}}$

   c. pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, et tout $n \in \mathbf{N}$, $f\left(x^{2^n}\right) = [\,f(x)]^{2^n}$ $(1')$

   d. pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, et tout $n \in \mathbf{N}$, $f\left(x^{2^{-n}}\right) = [\,f(x)]^{2^{-n}}$ $(2')$

4. Soit a et x deux réels positifs non nuls.

   a. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{2^{-n}}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f\left(a^{2^{-n}}\right) - f\left(x^{2^{-n}}\right)\right]$.

   En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left[f(a)\right]^{2^{-n}} - \left[f(x)\right]^{2^{-n}}\right)$.

   b. Démontrer que, si f s'annule pour un réel a non nul, alors, pour tout réel x non nul, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f(x)\right]^{2^{-n}} = 0$.

   En déduire que f est constante sur $]\ 0\ ;+\infty\ [$, puis que f est constante sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$.

5. On suppose f non constante.

   a. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $f(x) \neq 0$.

   b. On considère la fonction g définie sur $]\ 0\ ;+\infty\ [$ par $g(x) = \dfrac{x\, f'(x)}{f(x)}$.

   En dérivant la relation $f(x^2) = [f(x)]^2$, calculer $g(x^2)$ en fonction de $g(x)$.

   c. Montrer que, quel que soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a : $g(x) = g\left(x^{2^n}\right)$ puis que $g(x) = g\left(x^{2^{-n}}\right)$.

   En faisant tendre n vers l'infini, démontrer que g est constante sur $]\ 0\ ;+\infty\ [$ et donc qu'il existe un réel k tel que, pour tout x appartenant à $]\ 0\ ;+\infty\ [$, on a : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{k}{x}$.

   d. En déduire que les fonctions cherchées, si elles ne sont pas constantes, sont nécessairement de la forme $x \mapsto f(x) = \alpha x^k$, avec $\alpha > 0$ et $k > 0$.

6. Pour quelles valeurs de α la fonction $x \mapsto \alpha x^k$ est-elle une fonction f cherchée ?

   En déduire toutes les fonctions f cherchées.

MÉTHODES POUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES (1)

Objectif	*Dégager quelques méthodes de résolution d'équations fonctionnelles*
Notions utilisées	*Raisonnement par récurrence. Limites. Dérivées.*

On appelle *équation fonctionnelle* une égalité mettant en jeu une fonction f, appartenant à un ensemble donné F de fonctions ainsi qu'une ou plusieurs variables, appartenant à des ensembles qui sont spécifiés.

Résoudre cette équation fonctionnelle, c'est trouver l'ensemble S des fonctions f éléments de F telles que l'égalité soit vérifiée pour toutes les valeurs des variables appartenant aux ensembles précisés par le texte.

Voici quelques exemples d'exercices sur les équations fonctionnelles :

1. Déterminer les fonctions f définies et continues sur $\mathbf{R}$ telles que pour tous réels x et y, on ait $f(x+y)\ f(x-y) = f(x)^2 .\ f(y)^2$.

2. Déterminer les fonctions f définies sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et à valeurs dans $[\,0\,;+\infty\,[$, vérifiant $f(2)=0$, ne s'annulant pas sur $[\,0\,;2\,[$, et telles que pour tous réels positifs x et y on ait $f(x+y) = f(\,x\,f(y)\,)$.

3. Déterminer les fonctions f définie et continues sur $\mathbf{R}$3 telles que pour tous réels x et y, on ait $f(x+y) = f(x)+f(y)$.

Les équations fonctionnelles sont très diverses, et la méthode de résolution du problème 1 est très différente de celle du problème 2. Quant au problème 3, les mathématiciens se sont rendus compte qu'il ne peut pas être résolu de façon vraiment satisfaisante. Ceci montre bien qu'une équation fonctionnelle peut être de résolution très difficile !

Le problème 3 admet en revanche un ensemble de solutions simples si on ne cherche que les fonctions *continues* vérifiant l'équation fonctionnelle. On voit par là le rôle important que peuvent jouer les hypothèses sur f.

Il y a aussi des équations fonctionnelles mettant en jeu la dérivée première de f, ou ses dérivées première et seconde, voire d'ordre supérieur... (exemple : $f'' = -4f$). On les appelle alors équations *différentielles*. Une équation fonctionnelle peut aussi faire intervenir une intégrale de f, et elle est alors nommée équation *intégrale*.

Sont exposées ci-dessous divers exemples de résolution d'équations fonctionnelles, mettant en jeu diverses méthodes. Par contre les équations différentielles et intégrales ne sont pas abordées ici.

ILLUSTRATION

Résolution d'équations fonctionnelles par A. -L. Cauchy, dans son ouvrage « Analyse Algébrique », datant de 1821. (Cité dans « Mathématiques au Fil des Âges », IREM, sous la direction de Jean Dhombres, chez Gauthier-Villars.

98

COURS D'ANALYSE

CHAPITRE V

DÉTERMINATION DES FONCTIONS CONTINUES D'UNE VARIABLE PROPRES À VÉRIFIER CERTAINES CONDITIONS.

§ I. — Recherche d'une fonction continue formée de telle manière que deux semblables fonctions de quantités variables, étant ajoutées ou multipliées entre elles, donnent pour somme ou pour produit une fonction semblable de la somme ou du produit de ces variables.

Lorsque, au lieu de fonctions entières, on conçoit des fonctions quelconques, dont on laisse la forme entièrement arbitraire, on ne peut plus réussir à les déterminer d'après un certain nombre de valeurs particulières, quelque grand que soit ce même nombre ; mais on y parvient quelquefois dans le cas où l'on suppose connues certaines propriétés générales de ces fonctions. Par exemple, une fonction continue de x, représentée par $\Phi(x)$, peut être complètement déterminée lorsqu'elle est assujettie à vérifier, pour toutes les valeurs possibles des variables x et y, l'une des équations

$$(1)\quad \Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)$$

$$(2)\quad \Phi(x+y)=\Phi(x)\times\Phi(y)$$

ou bien, pour toutes les valeurs réelles et positives des mêmes variables, l'une des équations suivantes :

$$(3)\quad \Phi(xy)=\Phi(x)+\Phi(y)$$

$$(4)\quad \Phi(xy)=\Phi(x)\times\Phi(y)$$

La résolution de ces quatre équations pose quatre problèmes différents que nous allons traiter l'un après l'autre.

A. EXPLOITATIONS D'UNE LIMITE

Exercice 1 : Fonctions périodiques

Soit T un nombre réel non nul. On note P l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ et vérifiant pour tout réel x l'équation fonctionnelle : $f(x+T) = f(x)$. On note Q l'ensemble des fonctions f éléments de P et de plus **admettant une limite finie en $+\infty$.**

1. Définir deux fonctions non constantes éléments de P.
2. Soit f une fonction élément de P.

   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel x $f(x+n.T) = f(x)$.

   Démontrer que l'on a également $f(x-n.T) = f(x)$.
3. Déduire de la question précédente que Q est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbf{R}$ (on pourra distinguer les cas $T > 0$ et $T < 0$).

Exercice 2

Soit K un nombre réel différent de 0, de 1 et de -1. On note S_0 l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, vérifiant pour tout réel x l'équation fonctionnelle $f(Kx) = f(x)$, **et admettant une limite finie en zéro**.

1. Soit f une fonction élément de S_0.

   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et, pour tout réel x, $f(K^n.x) = f(x)$. Démontrer que l'on a également $f(K^{-n}x) = f(x)$.
2. Démontrer que S_0 est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbf{R}^*$ (on pourra distinguer les cas $K > 1$ et $K < 1$).

B. MÉTHODE DU « CHANGEMENT DE FONCTION »

Cette méthode consiste, à partir d'une fonction inconnue dans une équation fonctionnelle (E), à construire une nouvelle fonction qui se trouve alors solution d'une nouvelle équation fonctionnelle (E'), plus aisée à résoudre.

Exercice 1

Soit K un nombre réel différent de 0, de 1 et de -1 ; soit p un entier relatif. On note S_p l'ensemble des fonctions g définies sur $\mathbf{R}^*$, vérifiant pour tout réel x non nul l'équation fonctionnelle $g(Kx) = K^p \cdot g(x)$, et telles que la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x^p}$ admette une limite finie en 0.

1. Soit g une fonction élément de S_p.

   Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{g(x)}{x^p}$ est élément de S_0.
2. Grâce à la conclusion de l'exercice 2, en déduire toutes les fonctions g éléments de l'ensemble S_p.

Exercice 2

On note S l'ensemble des fonctions h définies sur $\mathbf{R}$, **dérivables en 1**, et vérifiant pour tout réel x l'équation fonctionnelle $h(x^2) = 2\,h(x)$. Soit h une fonction élément de l'ensemble S.

1. Déterminer $h(1)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R^*}$ par $g(x) = h(e^x)$.
   Trouver une équation fonctionnelle vérifiée par g.
   Démontrer que $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{h(e^x)-h(1)}{e^x-1}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}$ et en déduire que cette expression admet une limite finie lorsque x tend vers 0.
   En déduire que g appartient à l'ensemble S_1 défini dans l'exercice 1, pour une valeur de K égale à 2.
3. Grâce au résultat démontré dans l'exercice 1, déterminer l'ensemble S.

Exercice 3

On note S l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbf{R}$, vérifiant pour tout réel x l'équation fonctionnelle $f(3x) = 9f(x) + x^3$, et de plus, telles que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x^2}$, admet une limite en 0.

1. Démontrer que toute fonction élément de S s'annule en zéro.
2. Démontrer qu'il existe une fonction φ élément de S de la forme $\varphi : x \mapsto ax^3$, où a est un nombre réel que l'on déterminera.
3. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$. On note h la fonction définie sur $\mathbf{R^*}$ par $h(x) = f(x) - \varphi(x)$. Démontrer que f est élément de S si et seulement si h est élément de l'ensemble S_2 défini dans l'exercice 1, pour une valeur de K égale à 3.
4. En déduire tous les éléments de l'ensemble S.
5. Déterminer la fonction f élément de S et vérifiant de plus $f(1) = 1$.

D'autres exemples et d'autres méthodes de résolution sont proposées dans le chapitre suivant

Sujet d'étude (Olympiades internationales 1983)

Déterminer toutes les fonctions f de $]\,0\,;+\infty\,[$ dans lui-même qui vérifient les conditions suivantes :

(1) Pour tous réels strictement positifs x et y : $f(x\,f(y)) = y\,f(x)$

(2) La limite de f en $+\infty$ est égale à zéro.

On pourra, si on le souhaite, chercher à partir de ce seul texte, sans lire les indications qui suivent.
Si on « sèche » trop, ou si on est impatient, on lira les indications ci-dessous.

INDICATIONS

• Démontrer que pour tout réel strictement positif x, le réel $x\,f(x)$ est invariant par f (c'est-à-dire que si l'on note ce réel y, on a $f(y) = y$).

• Soit y un réel invariant par f. Démontrer que pour tout réel x : $f(y.x) = y.\,f(x)$.

En déduire que f(1) = 1 puis que $\dfrac{1}{y}$ et y^n (où $n \in \mathbf{Z}$) sont invariants, et, en exploitant la limite, que y ne peut être ni strictement supérieur à 1, ni strictement inférieur à 1.

• Conclure.

MÉTHODES POUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES (2)

Objectif	*Dégager quelques méthodes de résolution d'équations fonctionnelles*
Notions utilisées	*Raisonnement par récurrence. Fonction exponentielle.*

Cette séquence présente, dans la continuité de la séquence précédente, d'autres méthodes de résolution d'équations fonctionnelles

A. DÉTERMINATION DE LA FONCTION SUR $\mathbf{Q}$, PUIS SUR $\mathbf{R}$

Exercice 1

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$, continues sur $\mathbf{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, l'équation fonctionnelle : $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Soit f une fonction remplissant ces conditions. Soit x un nombre réel quelconque.

1. a. Démontrer que $f(0) = 0$ et que $f(-x) = -f(x)$.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $f(n.x) = n.f(x)$

   c. Démontrer que pour tout entier naturel n, $f(-n.x) = -n.f(x)$.

   On a donc, pour tout entier relatif k, $f(k.x) = k.f(x)$.

   d. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul p, $f\left(\dfrac{1}{p}x\right) = \dfrac{1}{p}f(x)$.

   e. Démontrer que, pour tout nombre rationnel q, $f(q.x) = q.f(x)$.

   On pose : $f(1) = \lambda$. Démontrer que, pour tout nombre rationnel q, $f(q) = \lambda\, q$.

2. On admet que tout nombre réel x est la limite d'une suite de nombres rationnels[1].

   Démontrer que, pour tout réel x, on a $f(x) = \lambda\, x$ (on pourra poser : $x = \lim q_n$, où, pour tout entier naturel n, q_n est un nombre rationnel).

   Quelles sont les fonctions f vérifiant les conditions énoncées ?

[1] Par exemple, on peut considérer la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, u_n étant le nombre décimal (donc rationnel) formé des chiffres de l'écriture décimale de x, <u>jusqu'au n-ième chiffre après la virgule seulement</u>. La suite (u_n) est alors une suite de nombres rationnels admettant x pour limite.

Exercice 2

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$, continues sur $\mathbf{R}$, vérifiant pour tout réel x l'équation fonctionnelle : $f(x+y).\,f(x-y) = (f(x).\,f(y))^2$.

Soit f une fonction remplissant ces conditions.

1. a. Montrer que $f(0) \in \{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$.

   b. Montrer que $f(0).f(2x) = [\,f(x)\,]^4$.

   En déduire que, si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle.

   c. Montrer que, pour tout réel x, $f(0)\,f(x) = \left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^4$

   En déduire que, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de $f(0)$.

2. On suppose que $f(0) \neq 0$.

   On veut montrer, en raisonnant par l'absurde, que, pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

   Supposons qu'il existe un réel non nul x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

   Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = 0$ et en déduire $f(0)$.

   Conclure.

3. On suppose que $f(0) = 1$.

   a. Montrer que $f(1)$ est un nombre strictement positif A.

   b. Montrer que f est une fonction paire.

   c. Déterminer $f(2)$, puis $f(3)$ en fonction de A et prouver par récurrence que pour, tout entier naturel n, $f(n) = A^{(n^2)}$.

   d. Soit x un nombre réel quelconque.

   Grâce à un raisonnement par récurrence analogue, démontrer que pour tout entier naturel p : $f(px) = f(x)^{(p^2)}$.

   e. En posant $x = \dfrac{1}{p}$ dans l'égalité précédente, démontrer que pour tout entier naturel non nul p et tout entier naturel n : $f\left(\dfrac{n}{p}\right) = A^{\left(\frac{n}{p}\right)^2}$.

   f. Démontrer que, pour tout rationnel q, $f(q) = A^{(q^2)}$.

   g. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = A^{(x^2)}$. (On pourra poser $x = \lim q^n$ où, pour tout entier naturel n, q^n est rationnel).

   h. Réciproquement, vérifier que toute fonction de cette forme vérifie bien les conditions posées au départ.

4. Étudier le cas où $f(0) = -1$. (On pourra considérer que $g = -f$)

B. MÉTHODES DIVERSES

Exercice 1. Exploitation d'une dérivabilité

On se propose de déterminer toutes les fonctions f à valeurs réelles, définies sur $]\,0\,;+\infty\,[$, vérifiant, pour tout réel x, l'équation fonctionnelle : $f(x.y) = f(x) + f(y)$, et qui soient de plus dérivables en 1.

Soit f une fonction remplissant ces conditions.

1. Démontrer que $f(1) = 0$.

2. On note a le nombre $f'(1)$.

   Exprimer a comme une limite, puis démontrer que f est dérivable en tout réel x de $]\,0\,;+\infty\,[$, et démontrer que $f'(x) = \dfrac{a}{x}$.

3. En déduire toutes les fonctions vérifiant les conditions données au départ[2].

Exercice 2. Méthode du changement de fonction

On se propose de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continues sur $\mathbf{R}$, différentes de la fonction nulle, et vérifiant, pour tout réel x, l'équation fonctionnelle $f(x.y) = f(x).\,f(y)$. On note S l'ensemble des fonctions f remplissant ces conditions.

Soit f une fonction élément de S.

1. Démontrer que f ne s'annule en aucun réel x non nul. (On pourra raisonner par l'absurde).

   Démontrer que $f(1) = 1$.

   Démontrer que $f(-1)$ est égal soit à 1, soit à (-1). En déduire que f est soit paire, soit impaire.

   Démontrer que f est strictement positive sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \ln(f(\mathrm{e}^x))$.

   Démontrer que g est continue sur $\mathbf{R}$ et que g vérifie l'équation fonctionnelle de l'exercice 1.

   En déduire, grâce à la résolution de l'exercice 1, l'expression de $g(x)$ pour x réel, puis celle de $f(x)$ pour x réel strictement positif.

3. Déterminer toutes les fonctions f de l'ensemble S.

---

[2] Deux autres méthodes peuvent s'appliquer à ce même exercice :

• On peut démontrer d'abord que f est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$, puis à se ramener par changement de fonction à l'exercice 1 ci-dessus. (Pour la méthode du changement de fonction, voir chapitre précédent).

• Une autre méthode, équivalente à la précédente, consiste, une fois établie la continuité de f sur $\mathbf{R}$, à poser $f(e) = a$, puis à exprimer $f(e^z)$ en fonction de a et de z, pour z entier, puis rationnel, puis réel.

Sujet d'étude 1. Méthode particulière (MP1, Dakar, 1971)

On se propose de déterminer l'ensemble S des fonctions f définies sur $\mathbf{R}$, constantes sur aucun intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et vérifiant la relation (1) : « pour tous réels x et y, $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ ».

Soit f un élément de S.

1. Montrer qu'il n'existe aucun réel x tel que $f(x)$ soit égal à 1 ou -1.
2. Montrer que f prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $]-1\,;1[$ (on remarquera que $f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)$).
3. Montrer que f s'annule en 0 et que f est une fonction impaire.
4. On fait à présent l'hypothèse que f est continue à droite en 0. Montrer alors que :
   a. f est continue en 0 ;
   b. f est continue sur $\mathbf{R}$.
5. On suppose à présent que f est dérivable à droite en 0.
   Montrer que f est dérivable en 0, puis que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
   Établir une relation simple entre f et sa dérivée f'.
6. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$. On pose $k=f(0)$
   a. Montrer que $g' = 2\,k\,g$ et que $g\,(0) = 1$.
   b. En déduire l'expression de $g\,(x)$ puis celle de $f(x)$.
   c. Déterminer toutes les fonctions f de l'ensemble S.

Sujet d'étude 2. Méthode particulière (Olympiades internationales 1986)

Déterminer toutes les fonctions f de $[\,0\,;+\infty\,[$ dans lui-même qui vérifient les conditions suivantes :

(1) Pour tous réels positifs x et y : $f(y.\,f(x)).\,f(x)=f(x+y)$

(2) $f(2)=0$

(3) Pour tout réel x de $[\,0\,;2\,[$, $f(x)\neq 0$.

On pourra si on le souhaite chercher à partir de ce seul texte, sans lire les indications qui suivent. Si on « sèche » trop, ou si on est impatient, on lira les indications ci-dessous.

INDICATIONS

a. Montrer que f est nulle sur $[\,2\,;+\infty\,[$.
b. Déterminer $f(0)$.
c. Montrer que, si $x\in\,]\,0\,;2\,[$, $f(x)\geq\dfrac{2}{2-x}$ (on posera $y=2-x$ dans l'égalité (1)).
d. Soit x élément de l'intervalle $]\,0\,;2\,[$. Démontrer qu'il existe un réel positif z tel que: $x+z=zf(x)$.
   Démontrer que $z.\,f(x)\geq 2$ (on posera $y=z$ dans l'égalité (1)). En déduire que $f(x)\leq\dfrac{2}{2-x}$.
e. Conclure.

QUEUE DE POISSON AU PÉAGE

Objectif	*Appliquer l'Analyse (équations fonctionnelles) aux Probabilités*
Notions utilisées	*Continuité. Dérivabilité. Fonctions exponentielles.*

Des véhicules se présentent à un poste de péage de façon aléatoire. Déterminer la loi de probabilité qui donne le nombre de véhicules se présentant au péage pendant un laps de temps donné.

Pour tout couple (u ; v) de réels positifs, tels que $u \leq v$, on note $X_{[u;v]}$ la variable aléatoire égale au nombre de véhicules se présentant au péage entre les instants u et v. On fait les hypothèses suivantes, qui paraissent correspondre à la réalité :

1. La loi de $X_{[u;v]}$ ne dépend que de la longueur de l'intervalle de temps $[u\ ;\ v]$; autrement dit, pour tout entier naturel n, il existe une fonction p_n définie sur $[\,0\ ;+\infty\,[$, à valeurs dans $[\,0\ ;1]$, telle que : $P\left(X_{[u;v]}=n\right)=p_n(v-u)$.

2. La probabilité d'arrivée d'un véhicule ou plus dans un intervalle de temps de durée nulle est elle-même nulle, soit encore : pour tout entier non nul n, $p_n(0) = 0$, et $p_0(0) = 1$; en revanche, la probabilité qu'il n'arrive aucun véhicule pendant une unité de temps n'est pas nulle : $p_0(1) \neq 0$. On notera : $p_0(1) = a$, avec $a \in\ ]\,0\ ;1\,]$.

3. Les variables aléatoires $X_{[u;v]}$ concernant des intervalles de temps disjoints ou n'ayant qu'un instant en commun sont indépendantes. Autrement dit, si $u \leq v \leq u' \leq v'$, $X_{[u;v]}$ et $X_{[u';v']}$ sont indépendantes

4. Lorsque la longueur de l'intervalle de temps tend vers 0, la probabilité d'arrivée de deux véhicules ou plus dans ce laps de temps est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un véhicule exactement : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-p_0(t)-p_1(t)}{p_1(t)}=0$.

A. Détermination de la fonction p_0

($p_0(t)$ = probabilité qu'il n'arrive aucun véhicule durant un intervalle de temps de durée t).

1. a. Démontrer que, pour tous réels positifs t et s , $p_o(t+s) = p_o(t).p_o(s)$. (On pourra considérer les intervalles de temps : $[\,0\ ;t\,]$ et $[\,t\ ;t+s\,]$).
   b. En déduire que pour tout entier naturel k, $p_0(k.t)=\left(p_0(t)\right)^k$
   c. Démontrer que pour tout entier naturel non nul k, $p_0\left(\dfrac{1}{k}\right)=a^{\left(\frac{1}{k}\right)}$.
   d. Démontrer que, pour tout rationnel positif r, $p_0(r)=a^r$.

2. Démontrer que la fonction p_0 est décroissante sur $\mathbf{R}^+$.

3. Démontrer que pour tout réel positif t, $p_0(t) = a^t$. (On rappelle que, pour tout réel t, il existe deux suites de nombres rationnels, l'une croissante, l'autre décroissante, qui convergent vers t).

B. Détermination de la fonction p_1.

($p_1(t)$ = probabilité qu'il arrive exactement un véhicule durant un intervalle de temps de durée t).

1. Démontrer que pour tous réels positifs t et s : $p_1(t+s) = p_1(t)p_0(s) + p_1(s)p_0(t)$.

2. On pose, pour tout réel positif t, $q_1(t) = p_1(t).a^{-t}$.
   a. Démontrer que q_1 est positive, et que, pour tous, réels positifs t et s, $q_1(t + s) = q_1(t) + q_1(s)$. Démontrer que q_1 est croissante sur $\mathbf{R}^+$.
   b. On pose $q_1(1) = C$. Donner l'expression de $q_1(t)$ en fonction de C et de t successivement pour $t \in \mathbf{Q}^+$ puis pour $t \in \mathbf{R}^+$ en suivant une démarche analogue à celle de la partie A.
   c. En déduire l'expression de $p_1(t)$ en fonction de C et de t pour $t \in \mathbf{R}^+$

3. En utilisant la dernière hypothèse faite en préliminaire, déterminer la valeur de C. Donner alors l'expression de $p_1(t)$.

C. Quelques propriétés des fonctions p_n

La fonction q1 a été définie dans la question B.2. On pose plus généralement, pour tout entier naturel n et tout réel positif t : $q_n(t) = p_n(t).a^{-t}$.

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. En utilisant la dernière hypothèse faite en préliminaire, démontrer que : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{p_n(t)}{p_1(t)} = 0$.

   En déduire que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{p_n(t)}{t} = 0$, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{q_n(t)}{t} = 0$, $\lim\limits_{t \to 0} p_n(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0} q_n(t) = 0$

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a. Démontrer que pour tous réels positifs t et s : $p_n(t+s) = \sum\limits_{i=0}^{i=n} p_{n-i}(t).p_i(s)$.
   b. En déduire que pour tous réels positifs t et s: $q_n(t+s) = q_n(t) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \left(q_{n-i}(t).q_i(s) + q_n(s) \right)$

D. Détermination de la fonction p_n pour n entier naturel

On note g_0 la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par, $g_0(t) = 1$.

Pour tout entier naturel non nul n, on note g_n la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $g_n(t) = \dfrac{(-\ln a)^n.t^n}{n!}$

Pour n entier naturel, on désigne par (E_n) l'égalité des fonctions q_n et g_n : $q_n = g_n$.

On souhaite démontrer par récurrence que l'égalité (E_n) est vraie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer que $q_0 = g_0$ et que $q_1 = g_1$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose dans cette question que l'égalité (E_k) est vraie pour tous les entiers k tels que $0 \leq k \leq (n-1)$.
   a. Démontrer alors que, pour tous réels positifs t et s:
   $q_n(t+s) = q_n(t) + g_n(t+s) - g_n(t) - g_n(s) + q_n(s)$.
   (On pourra utiliser la formule du binôme de Newton).
   b. En déduire que q_n est continue à droite en tout réel positif t.
   c. On pose $\Phi = q_n - g_n$. Démontrer que, pour tous réels positifs t et s , $\Phi(t+s) = \Phi(t) + \Phi(s)$.
   d. On pose $\Phi(1) = C$. En suivant une méthode analogue à celles utilisées précédemment, déterminer $\Phi(t)$ en fonction de t et de C, pour t nombre réel positif.
   e. Démontrer que C est nul. En déduire que $q_n = g_n$.
3. Grâce aux questions précédentes, déterminer les fonctions q_n, puis p_n, pour n entier naturel quelconque.

E. Nature de la loi suivie par les variables aléatoires $X_{[0\,;\,t\,]}$

On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbf{N}$, suit la loi de Poisson de paramètre λ si, pour tout entier naturel n, $P(X = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$.

Déduire de l'étude précédente que la variable aléatoire $X_{[0\,;\,t\,]}$, donnant le nombre de véhicules se présentant au péage au cours d'une durée de t secondes, suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

MOYENNE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

Objectif	*Étude d'une fonction définie à partir d'une limite de suite et caractérisée par des équations fonctionnelles.*
Notions utilisées	*Le programme d'Analyse de terminale S. Existence de la limite d'une suite croissante majorée. Limite à droite. Limite à gauche.*

Étude d'une fonction définie à partir d'une limite de suite et caractérisée par des équations fonctionnelles.

Problème

1. À tout couple (a ; b) de réels positifs ou nuls, on associe les suites u et v ainsi définies :

$$(1)\quad \begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbf{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) \end{cases}$$

   a. Calculer u_n et v_n en fonction de n dans les deux cas particuliers $a = 0$, $b \geq 0$ et $a \geq 0$, $b = 0$.

   b. Montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq 1$ et que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones à partir du rang 1.

   c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite. Cette limite, qui est fonction du couple (a ; b) et qui ne peut être explicitée en général, sera notée $L\,(a, b)$.

   d. Montrer que, pour $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $\lambda \geq 0$, on a :

$$(2)\quad L(a,b) = L(b,a)$$

$$(3)\quad L(\lambda a, \lambda b) = \lambda L(a,b)$$

$$(4)\quad \sqrt{ab} \leq L(a,b) \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

$$(5)\quad L(a,b) = L(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$$

2. On utilise la limite étudiée plus haut pour définir la fonction $F : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & L(1,x) \end{array}$

   a. Calculer $F\,(0)$ et $F\,(1)$.

   b. Soit x et x' deux réels positifs ou nuls tels que $x < x'$. On considère les suites u, v, u' et v' définies par les relations (1) avec $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = x \end{cases}$ et $\begin{cases} u_0' = 1 \\ v_0' = x' \end{cases}$.

   Comparer, pour tout entier naturel n, d'une part u_n et u_n' et d'autre part v_n et v_n'.

En déduire que $F(x) \leq F(x')$.

Quel est le sens de variation de la fonction F ? Quel est le signe de $F(x)$?

3. En utilisant les résultats du 1.d., montrer que, pour $x > 0$, on a :

$$(6) \quad \sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}(1+x)$$

$$(7) \quad F(x) = xF\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(8) \quad F(x) = \sqrt{x}\,F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$(9) \quad F(x) = \frac{1}{2}(1+x)F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

4. a. Montrer que F est dérivable en 1 et préciser la valeur de $F'(1)$.

b. Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c. On étudie F au voisinage de 0.

Rappel : Toute fonction croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$ admet une limite à droite en 0.

Soit ℓ la limite à droite de F en 0. Montrer, en utilisant l'égalité (9) que $\ell = 0$

F est-elle continue en 0 ? F est-elle dérivable en 0 ?

d. Démontrer que, pour tous réels strictement positifs s et t tels que $t \leq s$, on a :

$$F(s) - F(t) = (s-t)F\left(\frac{1}{s}\right) + t\left[F\left(\frac{1}{s}\right) - F\left(\frac{1}{t}\right)\right]$$

puis $0 \leq F(s) - F(t) \leq (s-t)F\left(\frac{1}{s}\right) \leq (s-t)F\left(\frac{1}{t}\right)$

Soit a un réel positif. Déduire des égalités précédentes que F est continue en a.

e. Étudier les limites éventuelles, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\dfrac{F(x)}{x}$ et $\dfrac{F(x)}{\sqrt{x}}$.

Interpréter graphiquement la limite de $\dfrac{F(x)}{x}$ en $+\infty$.

Interpréter les deux limites ci-dessus en termes de croissance comparées des fonctions F, $x \mapsto x$, $x \mapsto \sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$.

f. Tracer dans un même repère les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2}(1+x)$ et donner l'allure de la courbe représentative de F.

F O F = EXP

Objectif	*Résolution d'une équation fonctionnelle par analyse et synthèse*
Notions utilisées	*Tout le programme de TS, en particulier le raisonnement par récurrence, mais aussi l'ensemble des propriétés des fonctions continues sur un intervalle de* **R**.

Dans cette séquence on soulève le problème de l'existence de fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ et vérifiant la relation : $f \circ f = \exp$ et on s'intéresse aux propriétés de telles fonctions.

A. Propriétés de base des fonctions solutions

On considère une fonction f continue sur $\mathbf{R}$ et vérifiant : $f \circ f = \exp$.

1. Encadrement de f par deux fonctions usuelles.
   a. Démontrer que toute solution de l'équation $f(x) = x$ est aussi solution de l'équation $e^x = x$.
   En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution.
   b. En déduire que $f(x) - x$ est de signe constant pour x réel.
   c. Démontrer qu'il est impossible que, pour tout réel x, on ait $f(x) < x$.
   En déduire que, pour tout réel x, $f(x) > x$.
   d. Démontrer que pour tout réel x, $f(x) < e^x$.
   e. Démontrer que $f(0)$ appartient à l'intervalle $]\,0\,;\,1\,[$.

2. Propriété fondamentale.
   Démontrer que pour tout réel x, $f(e^x) = e^{f(x)}$ (propriété (*)).

3. Limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$
   b. $f(x)$ s'écrit $f(x) = \ln(\exp(f(x)))$.
   Transformer cette écriture grâce à la propriété (*****). En déduire que f tend vers $\ln(f(0))$ en $-\infty$.
   Démontrer que $\ln(f(0))$ est strictement négatif.

4. Sens de variation de f.
   Démontrer que f est injective.
   En déduire que f est strictement monotone sur $\mathbf{R}$, puis que f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ (utiliser 3.a.).

B. Croissances comparées au voisinage de $+\infty$

1. Minoration de $\dfrac{f(x)}{x}$.

   On pose, pour tout réel x strictement positif, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

   a. En considérant l'image par g de l'intervalle $[\,1\,;\,\mathrm{e}\,]$, démontrer qu'il existe un nombre réel k, strictement supérieur à 1, tel que, pour tout réel x de $[\,1\,;\,\mathrm{e}\,]$, $g(x)\geq k$.

   b. Démontrer que, pour tout réel strictement positif x, $g(\mathrm{e}^x)=\exp(\,x\,(\,g(x)-1)\,)$ (propriété (**)).

   Démontrer que, si x est élément de $[\,1\,;+\infty\,[$ et si $g(x)\geq k$, alors $g(\mathrm{e}^x)\geq k$ (on rappelle que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x\geq x+1$).

   c. On définit une suite $(\mathrm{e}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}^*}$ par récurrence en posant $\mathrm{e}_1=\mathrm{e}$ et, pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{e}_{n+1}=\exp(\mathrm{e}_n)$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, g est minorée par k sur l'intervalle $[\,1\,;\,\mathrm{e}_n\,]$.

   d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}_n\geq n$.

   En déduire la limite de la suite (e_n).

   e. Démontrer que g est minorée par k sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

2. Diverses limites

   a. À partir de la propriété (**), démontrer que, pour tout réel t de $[\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$, $g(t)=\exp(\,\ln t\,(\,g(\ln t)-1))$.

   En déduire, grâce au B.1.e., une minoration de $g(t)$, pour t élément de $[\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$, puis la limite de $\dfrac{f(t)}{t}$ quand t tend vers $+\infty$.

   b. Soit $a\in\,]\,0\,;+\infty\,[$ et $x\in\,]\,1\,;+\infty\,[$.

   Exprimer $\dfrac{f(x)}{x^a}$ en fonction de $y=\ln x$, en utilisant la propriété (*).

   En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{x^a}$ pour x tendant vers $+\infty$.

   c. Pour x réel, $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$ peut s'écrire aussi $\dfrac{f(x)}{f(f(x))}$. En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$ pour x tendant vers $+\infty$.

   d. Soient a et x deux réels strictement positifs.

   Exprimer $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{ax}}$ en fonction de $y=\ln x$, en utilisant la propriété (*).

   En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{ax}}$ pour x tendant vers $+\infty$.

   e. Soient a et x deux réels strictement positifs.

   Exprimer $\dfrac{f(x)}{\exp(x^a)}$ en fonction de $y=\ln x$,, en utilisant la propriété (*).

   En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{\exp(x^a)}$ pour x tendant vers $+\infty$.

C. Expression de f à partir d'une de ses restrictions

Soit ϕ la restriction de f à l'intervalle $[\,0\,;f(0)\,]$. On se propose de montrer que la connaissance de ϕ entraîne la connaissance de f sur $\mathbf{R}$ tout entier.

1. a. Démontrer que ϕ est bijective de $[\,0\,;f(0)\,]$ sur $[\,f(0)\,;1\,]$.

   b. Démontrer que $\exp\circ\phi^{-1}$ est le restriction de f à l'intervalle $[\,f(0)\,;1\,]$.

   La connaissance de ϕ entraîne donc la connaissance de f sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$.

   On note f_0 la restriction de f à $[\,0\,;1\,]$.

2. Soit ψ la restriction de f à l'intervalle $]\,-\infty\,;0\,]$.

   Démontrer que pour tout x de $]\,-\infty\,;0\,]$, $\psi(x)=\ln(\,f_0\,(\,\exp\,(x)\,)\,)$. (On pourra utiliser la propriété *).

   La connaissance de f sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ entraîne donc la connaissance de f sur l'intervalle $]\,-\infty\,;0\,]$.

3. On définit une suite $(e_n)_{n\in\mathrm{N}}$ par récurrence en posant : $e_1=0$ et, pour tout entier naturel non nul n, $e_{n+1}=\exp(e_n)$. On note I_n l'intervalle $[\,e_n\,;e_{n+1}\,]$, et f_n la restriction de f à l'intervalle I_n.

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $f_{n+1}=\exp\circ f_n\circ\ln$.

   En conséquence, la connaissance de f sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ entraîne la connaissance de la restriction de f à chacun des intervalles de la forme $[\,e_n\,;e_{n+1}\,]$, pour n entier naturel. Or la réunion de tous ces intervalles est $[\,0\,;+\infty\,[$[3].

   Donc la connaissance de f sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ entraîne la connaissance de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

D. Construction des fonctions solutions

Soit α un réel de l'intervalle $]\,0\,;1\,[$. On considère une fonction ϕ définie, continue et strictement croissante sur $[\,0\,;\alpha\,]$ telle que $\phi(0)=\alpha$ et $\phi(\alpha)=1$.

1. En suivant le plan de la partie C, construire une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ dont la restriction à $[\,0\,;\alpha\,]$ soit ϕ.

2. Démontrer que la fonction f ainsi construite est continue sur $\mathbf{R}$.

3. Pour tout entier naturel n, on note f_n la restriction de f à l'intervalle I_n.

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, si x est élément de I_n, alors $f_n(x)$ appartient à I_n ou à I_{n+1}.

   b. Démontrer par récurrence la proposition suivante :
   Pour tout entier naturel n et pour tout x élément de I_n, $f\circ f(x)=f\circ f_n(x)=e^x$.
   On distinguera les deux cas : $f_n\,(x)\in I_n$; $f_n\,(x)\in I_{n+1}$.

   c. Soit ψ la restriction de f à $]\,-\infty\,;0\,]$ et soit x un élément de cet intervalle.
   Démontrer que $\psi(x)$ appartient soit à $]\,-\infty\,;0\,]$, soit à I_0.
   En déduire que $f\circ f(x)=f\circ\psi(x)=e^x$.

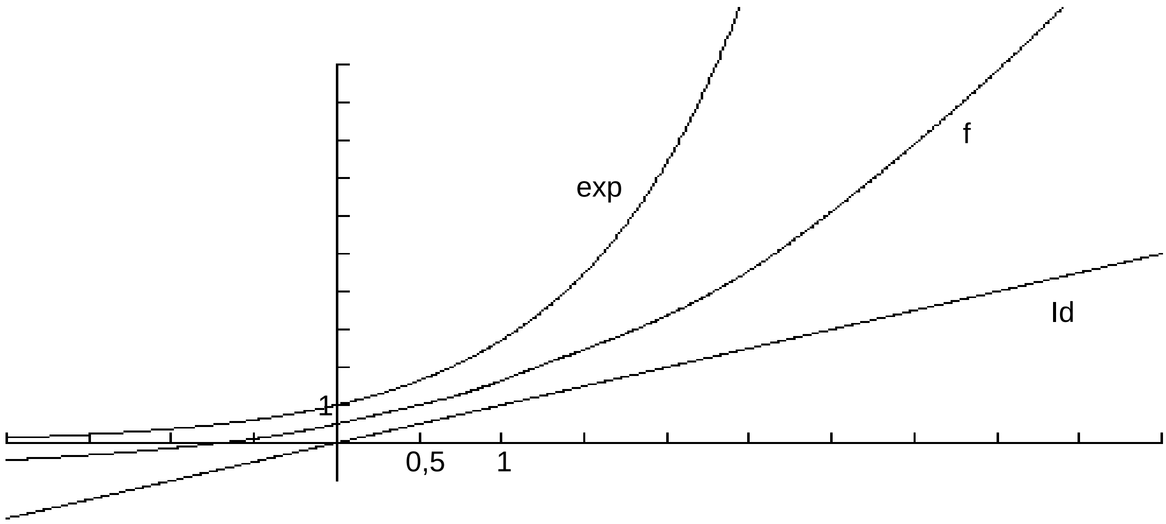
4. Conclure.

[3] Puisque la suite (e_n) est une suite croissante tendant vers $+\infty$. Ce dernier résultat a été démontré à la question B.1.d.

E. Représentation graphique et programmation d'une fonction solution

Si on pose $\alpha = \frac{1}{2}$ et si on considère la fonction affine ϕ définie sur $\left[\, 0\,; \frac{1}{2} \,\right]$ par $\phi(x) = 0{,}5 + x$, la fonction ϕ ainsi définie vérifie les hypothèses spécifiées au début de la partie D. D'après la partie D., il existe donc une unique fonction f continue sur $\mathbf{R}$, vérifiant $f \circ f = \exp$, et dont la restriction à $\left[\, 0\,; \frac{1}{2} \,\right]$ soit égale à ϕ.

Une programmation récursive permet d'utiliser l'ordinateur ou la calculatrice programmable pour obtenir la courbe représentative de f sur un intervalle borné quelconque.



La programmation récursive de la fonction f repose sur les relations vues ci-dessus :

- Pour tout x de $[\ \phi(0)\ ;\ 1\ ]$, $\ f(x) = \exp \circ \phi^{-1}(x)$
- Pour tout x de $]\ -\infty\ ;\ 0\ ]$, $f(x) = \ln(\ \phi(\exp(x))\ )$.
- Pour tout entier naturel n , $f_{n+1} = \exp \circ f_n \circ \ln$.

La voici par exemple écrite en ThinkPascal.

```
function  fn(t: real): real;
begin
   if (0 <= t) and (t <= 0.5) then  begin   fn := 0.5 . t end;
   if (t >= 0.5) and (t <= 1) then  begin  fn := exp(t - 0.5) end;
   if (t >= 1) then  begin  fn :=  exp( fn(ln(t)))  end;
   if (t <= 0) then begin  fn :=  ln( fn(exp(t))) end;
end;
```