FONCTIONS

DES FONCTIONS DEFINIES A L'AIDE D'UN GRAPHIQUE

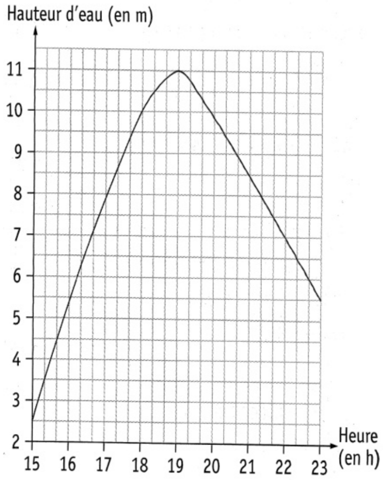
<table>
<tr><th>QUESTIONS / OUTILS</th><th>EXEMPLE</th></tr>
<tr><td>
<u>Définir une fonction</u> :

La grandeur 2 représentée en ordonnées varie en fonction de la grandeur 1 représentée en abscisses.

La fonction ainsi définie associe aux valeurs de la grandeur 1, des valeurs de la grandeur 2.

$\text{grandeur1} \mapsto \text{grandeur2}$
</td><td>
Les variations de la hauteur d'eau du port de Saint-Malo durant une période de 8 heures (de 15 h à 23 h) sont représentées ci-contre :

Notons V , la fonction ainsi définie.
A un horaire donné, V associe une hauteur d'eau en mètres.

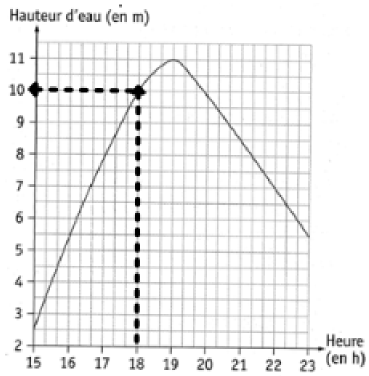
$\text{horaire} \mapsto \text{hauteur d'eau}$


</td></tr>
<tr><td>
<u>Déterminer l'image d'un nombre donné par une fonction</u> :

Cela signifie que la grandeur 1 prend la valeur de ce nombre donné et que l'on cherche la valeur de la grandeur 2 qui lui correspond.

$\text{nombre donné} \mapsto ?$
</td><td>
Déterminer l'image de 18 par V .

Il faut repérer le point de la courbe qui a 18 pour abscisse et lire son ordonnée.
$\boxed{\text{L'image de 18 par } V \text{ est 10}}$.
On écrit aussi $V(18)=10$

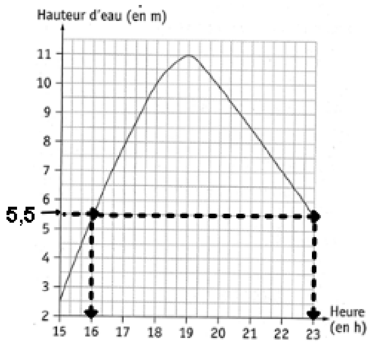
<u>Remarque</u> :
Nous avons donc déterminé la hauteur d'eau en mètres à 18 h.


</td></tr>
<tr><td>
<u>Déterminer l' ou (les) antécédent(s) d'un nombre donné par une fonction</u> :
Cela signifie que la grandeur 2 prend la valeur de ce nombre donné et que l'on cherche la (ou les valeurs) de la grandeur 1 qui lui correspond(ent).

$? \mapsto \text{nombre donné}$

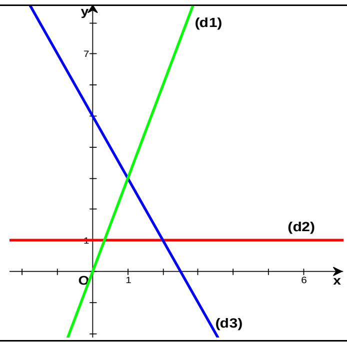
<u>REMARQUE</u> :
Alors qu'un nombre ne peut avoir qu'une image par une fonction, un nombre peut avoir plusieurs antécédents par une fonction.
</td><td>
Déterminer les antécédents de 5,5 par V.

Il faut repérer le (ou les) point(s) de la courbe qui a(ont) 5,5 pour ordonnée et lire leur abscisse.
$\boxed{\text{Les antécédents de 5,5 par } V \text{ sont 16 et 23}}$.

<u>Remarque</u> :
Nous avons donc déterminé les horaires pour lesquels la hauteur d'eau en mètres est de 5,5 mètres.


</td></tr>
<tr><td>
<u>Déterminer la nature d'une fonction</u>
Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
<u>Cas particuliers</u> :
Si la droite passe par l'origine du repère, la fonction est linéaire.
Si la droite est parallèle à l'axe des abscisses, la fonction est constante.
</td><td>
(d1) est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

(d2) est la représentation graphique d'une fonction constante.

(d3) est la représentation graphique d'une fonction affine ni linéaire ni constante.


</td></tr>
</table>

<u>Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine dont la représentation graphique est donnée.</u>

• Soient a et b, deux nombres quelconques « fixes »

La fonction f qui, à x, associe le nombre $ax+b$ est appelée fonction affine.

Si $b=0$ et $a\neq 0$, f est linéaire.

Si $a=0$, f est constante.

a est appelé le coefficient directeur de la droite.

• Dans un repère, la droite représentant une fonction affine f passe par le point de coordonnées $(0;b)$.

b est appelé l'ordonnée à l'origine.

Pour obtenir a, utiliser les coordonnées d'un autre point de la droite.

• Dans un repère, la droite représentant une fonction linéaire g passe par l'origine du repère. Pour obtenir a, utiliser les coordonnées d'un autre point de la droite.

Déterminer l'expression algébrique des fonctions associées aux droites.

• Soit f, la fonction affine représentée par (d3) alors $f(x)=ax+b$

De A, on déduit que $b=5$ soit $f(x)=ax+5$

De B, on déduit que $f(2)=1$ soit

$2a+5=1$ d'où $a=\dfrac{1-5}{2}=-2$

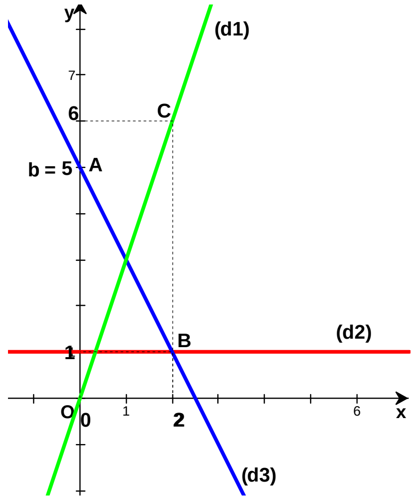
Donc $\boxed{f(x)=-2x+5}$

• Soit g, la fonction linéaire représentée par (d1) alors $g(x)=ax$

De C, on déduit que $g(2)=6$ soit

$2a=6$ d'où $a=\dfrac{6}{2}=3$

Donc $\boxed{g(x)=3x}$



• Soit h, la fonction constante représentée par (d2).

Tous les points de (d2) ont 1 pour ordonnée donc $\boxed{h(x)=1}$

QUESTIONS SUR DES FONCTIONS DEFINIES A L'AIDE D'UNE FORMULE

QUESTIONS / OUTILS	EXEMPLES	
Définir une fonction ou exprimer une grandeur 2 en fonction d'une grandeur 1 Si une grandeur 2 varie en fonction d'une grandeur 1 selon une procédure calculatoire identifiée alors on peut déterminer **l'expression algébrique de la grandeur 2 en fonction de la grandeur 1**.	**Exemple 1 :** Déterminer la fonction qui modélise le volume d'un cube en fonction de la longueur de ses arêtes. Soit V , la fonction qui, à x, la longueur des arêtes d'un cube, associe le volume de ce cube. $\boxed{V \text{ est alors définie par } V(x) = x^3}$ **Exemple 2** : Un disquaire en ligne propose de télécharger légalement de la musique : 0,50 € par morceau téléchargé moyennant un abonnement annuel de 35 €. Exprimer, en fonction du nombre x de morceaux téléchargés, le prix à payer. On notera ce prix en euros $g(x)$. $\boxed{g(x) = 0{,}5x + 35}$	
Déterminer la nature d'une fonction Il s'agit d'identifier la nature de l'expression algébrique donnée. **Si** $f(x)=ax+b$ alors f est affine. On peut préciser davantage : Si $b=0$ et $a\neq 0$, f est linéaire. Si $a=0$, f est constante. **Sinon** f n'est pas affine.	• V , la fonction qui, à x, la longueur des arêtes d'un cube, associe le volume de ce cube définie par $V(x) = x^3$. $V(x)$ n'est pas du type $ax+b$ donc V n'est pas affine. • La fonction g définie par $g(x) = 0{,}5x + 35$ est affine (ni linéaire ni constante). • La fonction P qui, au diamètre x d'un cercle, lui associe le périmètre du cercle est définie par $P(x)=\pi x$ donc P est linéaire de coefficient π .	
Déterminer l'image d'un nombre donné par une fonction : On considère une fonction $f : x \mapsto f(x)$ Pour calculer l'image d'un nombre donné, on remplace dans la formule $f(x)$ l'inconnue x par ce nombre donné.	**Exemple 1** : Soit $f : x \mapsto -2x + 4$ Calculer l'image de 3 par f. $f(x) = -2x + 4$ donc $f(3) = -2 \times 3 + 4$ soit $f(3) = -6 + 4$ d'où $f(3) = -2$ $\boxed{\text{L'image de 3 par } f \text{ est } -2}$.	**Exemple 2** : Soit $g : x \mapsto -x^2 + 5x - 1$ Calculer l'image de -2 par g. $g(x) = -x^2 + 5x - 1$ donc $g(-2) = -(-2)^2 + 5 \times (-2) - 1$ soit $g(-2) = -4 - 10 - 1$ d'où $g(-2) = -15$ $\boxed{\text{L'image de } -2 \text{ par } g \text{ est } -15}$.
Déterminer l' ou (les) antécédent(s) d'un nombre donné par une fonction : On considère une fonction $f : x \mapsto f(x)$ Pour calculer l'(ou les) antécédent(s) d'un nombre donné, on résout l'équation $f(x) = \text{nombre donné}$	**Exemple 1** : Soit $f : x \mapsto -2x + 4$ Déterminer l'antécédent de 3 par f. Résolvons l'équation $f(x) = 3$: $-2x + 4 = 3$ $-2x = 3 - 4$ $-2x = -1$ $x = \frac{-1}{-2} = 0{,}5$ (à vous de vérifier) $\boxed{\text{L'antécédent de 3 par } f \text{ est } 0{,}5}$.	**Exemple 2** : Soit $g : x \mapsto (x-4)(4x+7)$ Déterminer les antécédents de 0 par g. Résolvons l'équation $g(x) = 0$: $(x-4)(4x+7) = 0$ On reconnaît une équation-produit. Donc $x - 4 = 0$ ou $4x + 7 = 0$ Soit $x = 4$ ou $x = \frac{-7}{4} = -\frac{7}{4}$ $\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } g \text{ sont 4 et } -\frac{7}{4}}$

Représenter graphiquement une fonction affine

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Deux points suffisent à tracer cette droite.

Si f est linéaire alors la droite passe par l'origine. Il s'agit de récupérer un autre point.

Si f est constante alors la droite passe par le point de coordonnées $(0;b)$ et est parallèle à l'axe des abscisses.

Si f est affine ni linéaire ni constante, la droite passe par le point de coordonnées $(0;b)$ et un autre point dont il faut déterminer les coordonnées.

Soient les fonctions f, g et h définies par $f(x)=-2$; $g(x)=-\frac{3}{4}x+1$ et $h(x)=\frac{5}{3}x$

- f est constante.
- g est affine ni linéaire ni constante. Elle est donc représentée par une droite qui passe par le point de coordonnées $(0;1)$.

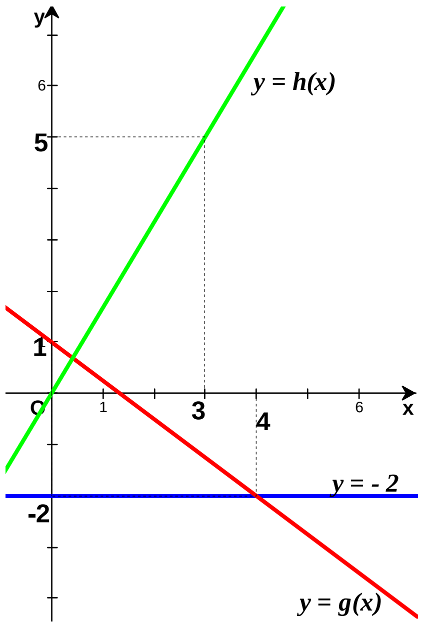
$g(4)=-\frac{3}{4}\times 4+1=-2$.

Un autre point de la droite représentant g est donc de coordonnées $(4;-2)$.

- h est linéaire donc la droite qui la représente passe par l'origine.

$h(3)=\frac{5}{3}\times 3=5$

Un autre point de la droite représentant h est donc de coordonnées $(3;5)$.



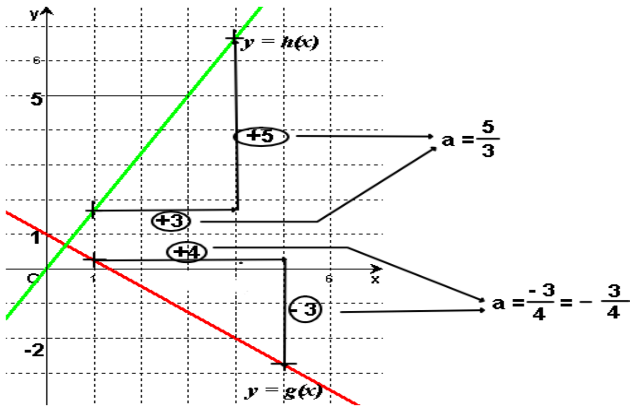
ATTENTION : Ne pas oublier d'identifier clairement chaque droite, surtout lorsqu'il y a plusieurs !!

Interprétation graphique du coefficient directeur :

Considérant deux points quelconques de la droite représentative d'une fonction affine définie par $f(x)=ax+b$.

Alors

$$a=\frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$$



Déterminer si un point de coordonnées données appartient à la courbe d'une fonction

On considère une fonction $f: x \mapsto f(x)$

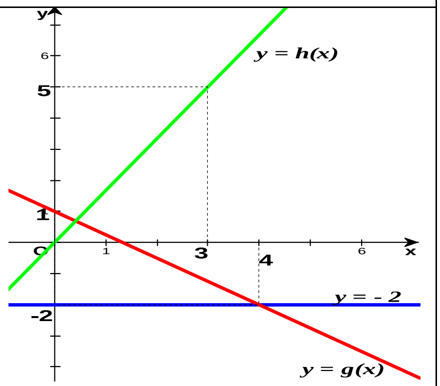
La représentation graphique de f est l'ensemble des points dont les coordonnées sont du type $(x; f(x))$

Leur ordonnée est l'image par f de leur abscisse.

Déterminer si le point A de coordonnées $(30;50)$ appartient à la représentation graphique de la fonction h définie par $h(x)=\frac{5}{3}x$

$h(x_A)=h(30)=\frac{5}{3}\times 30=50=y_A$

Donc le point A de coordonnées $(30;50)$ appartient à la représentation graphique de la fonction h.



<table>
<tr>
<td>

<u>Déterminer l'expression d'une fonction affine connaissant deux nombres et leur image</u>

On considère une fonction affine $f:x\mapsto ax+b$

On connaît deux nombres et leur image respective par f.

Le but est de déterminer a et b, permettant ainsi de définir f

La 1[ière] méthode repose sur la résolution d'un système.

La 2[nde] méthode repose sur la propriété de proportionnalité des accroissements :

</td>
<td rowspan="3">

<u>Illustration de la 1[ière] méthode</u> :

Déterminer la fonction affine $f:x\mapsto ax+b$ telle que $f(-1)=5$ et $f(5)=2$

f est affine donc $f(x)=ax+b$

Donc $f(-1)=5$ s'écrit $a\times(-1)+b=5$

et $f(5)=2$ s'écrit $a\times 5+b=2$

On obtient donc le système $\begin{cases}-a+b=5\\5a+b=2\end{cases}$

Procédons par substitution :

$\begin{cases}b=5+a\\5a+5+a=2\end{cases}$

$6a=2-5$

$a=\dfrac{-3}{6}$

$a=-0{,}5$

$b=5+a=5-0{,}5$

$b=4{,}5$

Pensez à vérifier

On obtient alors que $\boxed{f(x)=-0{,}5x+4{,}5}$

</td>
<td rowspan="3">

<u>Illustration de la 2[nde] méthode</u> :

Déterminer la fonction affine $f:x\mapsto ax+b$ telle que $f(-1)=5$ et $f(5)=2$

f est affine donc $f(x)=ax+b$

Utilisons la proportionnalité des accroissements :

$a=\dfrac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}$

Donc $a=\dfrac{2-5}{6}$

Soit $a=\dfrac{-3}{6}=-0{,}5$

De plus, $f(-1)=5$ s'écrit $a\times(-1)+b=5$

Donc $(-0{,}5)\times(-1)+b=5$

Soit $0{,}5+b=5$

D'où $b=5-0{,}5=4{,}5$

On obtient alors que $\boxed{f(x)=-0{,}5x+4{,}5}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

pour tous nombres distincts x_1 et x_2, $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

(les accroissements des valeurs de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements des valeurs de x)

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
</tr>
</table>